目录

第1章 常用逻辑用语

逻辑规矩有方圆，
当且仅当令如山．
或者婉言容选择，
充分游刃天地宽．

人与人之间交流的语言，基本上分为两类：一类是感性语言，一类是理性语言．感性语言是对视、听、闻、触摸等获取的信息所作的表达，理性语言则是对大脑中的思维活动所作的表达．逻辑用语就是一种理性语言，是表达理性思维的载体．

学习常用逻辑用语，掌握常用逻辑用语的用法，就可以利用这些逻辑用语准确、简洁地表述数学内容和数学思想．同时，在各种交流活动中，也可以利用这些逻辑用语严密地表述对各种问题的思考结果．

1.1 命题及其关系

1.1.1 命题的概念和例子

数学知识的丰富和数学的发展依赖于人们不断地提出命题并力图证明这些命题．那么什么是命题呢？

在数学课中曾遇到过大量如下的语句：

(1) 奇偶相同的两个整数之和是一个偶数；

(2) 三角形的三内角之和等于 $180°$；

(3) 如果 a、b 是任意两个正实数，那么 $a+b\geqslant 2\sqrt{ab}$；

(4) $\sin 60°=\frac{\sqrt{2}}{2}$；

(5) 如果实数 a 满足 $a^2=9$，那么 $a=3$．

上述这些句子都叫作命题，它们的共同特征是每个句子都陈述了能够判断其成立或不成立的一件事情．

可以判断成立或不成立的语句叫作命题（proposition），成立的命题叫作真命题（true proposition），不成立的命题叫作假命题（false proposition）．例如，上述命题 (1)、(2)、(3) 是三个真命题，而命题 (4)、(5) 是两个假命题．

例 试证：

（1）命题“如果 a，b 是正实数且 $a^2>b^2$，那么 $a>b$”是真命题；

（2）命题“如果 a，b 是任意实数且 $a^2>b^2$，那么 $a>b$”是假命题.

证 （1）$\because\ a^2>b^2$，

$\therefore\ a^2-b^2=(a-b)(a+b)>0.$

$\because\ a>0$，$b>0$，

$\therefore\ a+b>0.$

因此，$a-b>0$，即 $a>b$.

于是，命题(1)是真命题.

（2）取 $a=-2$，$b=1$，则 $a^2>b^2$，但 $a<b$. 于是，命题(2)是假命题.

证明假命题的通常方法就是举出一个反例.

暂时不知道真假的命题可以叫作猜想(conjecture)．一个好的猜想将推动数学的发展，因为人们在证明猜想的过程中会提出许多新的数学概念和想出许多新的数学方法.

在学习数学的过程中，同学们应尽力提出自己的猜想，并力图证明它们，这是需要努力培养的一种能力.

例如：命题“当整数 $n\geq 3$ 时，方程 $x^n+y^n=z^n$ 没有正整数解”就是著名的费马(Fermat)大定理．长期以来，人们不知道费马大定理究竟是真命题还是假命题，一直作为一个猜想而存在．历经 300 多年，直至 1994 年，费马大定理才最终获得证明.

练 习

判断下列语句是否是命题？若是，则判断其真假.

（1）$x<4$；

（2）有两个角为 $45°$ 的三角形是等腰直角三角形；

（3）方程 $x^2+1=0$ 没有实数根.

习题 1

学而时习之

1. 判断下列命题的真假：

（1）若 a，b 是任意实数，则 $|a|+|b|>0$；

（2）若 x，y 是实数且 $x^2+y^2=0$，则 $x=y=0$.

温故而知新

2. 试证：

（1）命题"若 $m>0$，则 $x^2+x-m=0$ 有两个不同的实数根"是真命题；

（2）命题"若 $x^2+x-m=0$ 有两个不同的实数根，则实数 $m>0$"是假命题.

3. 试证：命题"两条对角线互相垂直的四边形一定是菱形"是假命题.

4. 试独立举出数学上一个真命题和一个假命题的例子.

1.1.2 命题的四种形式

同学们在初中阶段已学过命题与逆命题的知识，知道如何构造一个命题的逆命题，也知道当一个命题为真时，它的逆命题可以为真也可以为假. 如果把两个互逆的命题中的一个叫作原命题，那么另一个叫作原命题的逆命题.

例如：

（1）原命题　若两个三角形全等，则它们相似；

（2）逆命题　若两个三角形相似，则它们全等.

又如：

(3) 否命题　若两个三角形不全等，则它们不相似；

(4) 逆否命题　若两个三角形不相似，则它们不全等.

仔细分析上述四个命题的构成，容易发现它们之间有内在的联系：由其中一个命题出发能够构造出其余的三个命题.

你能发现构造的规律吗？

命题通常由两部分构成——命题的条件部分和命题的结论部分.例如，命题(1)的条件部分是“两个三角形全等”，结论部分是“两个三角形相似”.分析上述四个命题的条件部分和结论部分就能发现：命题(2)的条件部分是命题(1)的结论部分，命题(2)的结论部分是命题(1)的条件部分；命题(3)的条件和结论分别是命题(1)的条件和结论的否定；命题(4)的条件是命题(1)结论的否定，命题(4)的结论是命题(1)条件的否定.在这种情况下，如果把命题(1)看作原命题，那么命题(2)叫作命题(1)的逆命题，命题(3)叫作命题(1)的否命题，命题(4)叫作命题(1)的逆否命题.这就是所谓的命题的四种形式.

我们讨论的命题都是条件和结论比较明显的命题.

分清命题的条件和结论是关键.

用符号抽象地表示命题可以更清晰地显示命题的四种形式.通常用小写拉丁字母 p，q，r，s，…表示最简单的命题，记号 $\neg p$ 表示命题 p 的否定，即不是 p.如果 p，q 表示两个命题，那么命题“若 p 则 q”的四种形式是：

原命题 (original proposition)　若 p 则 q；

逆命题 (converse proposition)　若 q 则 p；

否命题 (negative proposition)　若 $\neg p$ 则 $\neg q$；

逆否命题 (converse-negative proposition) 若 $\neg q$ 则 $\neg p$.

以命题四种形式中的任一种作为原命题，还能产生新的命题形式吗？

命题的四种形式中，任一对命题之间的相互关系如图1-1所示：

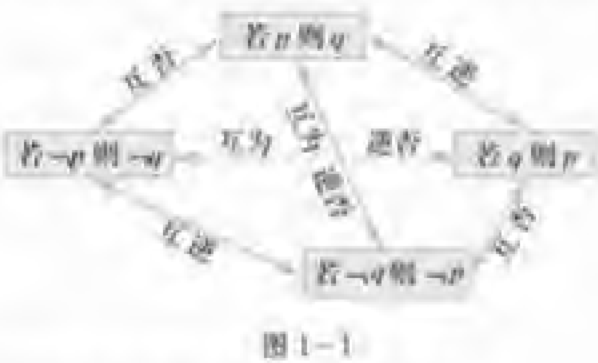


图1-1

例1　分别写出下列两个命题的四种形式.

(1) 若 $\alpha=60^\circ$，则 $\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$；

(2) 设 $a>0$，$b>0$，若 $a>b$，则 $a^2>b^2$.

解 (1) 原命题 若 $\alpha=60^\circ$，则 $\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$；

逆命题 若 $\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$，则 $\alpha=60^\circ$；

否命题 若 $\alpha\neq60^\circ$，则 $\sin\alpha\neq\frac{\sqrt{3}}{2}$；

逆否命题 若 $\sin\alpha\neq\frac{\sqrt{3}}{2}$，则 $\alpha\neq60^\circ$.

(2) 原命题 设 $a>0$，$b>0$，若 $a>b$，则 $a^2>b^2$；

逆命题 设 $a>0$，$b>0$，若 $a^2>b^2$，则 $a>b$；

否命题 设 $a>0$，$b>0$，若 $a\leqslant b$，则 $a^2\leqslant b^2$；

逆否命题 设 $a>0$，$b>0$，若 $a^2\leqslant b^2$，则 $a\leqslant b$.

例 2 把下列命题改写成“若 p 则 q”的形式，并写出它们的逆命题、否命题和逆否命题.

关键是写好原命题的条件 p 和结论 q.

(1) 矩形的两条对角线互相平分；

(2) 小于 -5 的数的平方大于 25.

解 (1) 原命题 若四边形是矩形，则它的两条对角线互相平分；

逆命题 若四边形的两条对角线互相平分，则它是矩形；

否命题 若四边形不是矩形，则它的两条对角线不互相平分；

逆否命题 若四边形的两条对角线不互相平分，则它不是矩形.

(2) 原命题 若 $a<-5$，则 $a^2>25$；

逆命题 若 $a^2>25$，则 $a<-5$；

否命题 若 $a\geqslant-5$，则 $a^2\leqslant25$；

逆否命题 若 $a^2\leqslant25$，则 $a\geqslant-5$.

原命题为真时不能判断它的逆命题的真假性，因此，判断一个命题的真假就是我们遇到的一个难题.

我们已经知道，当原命题为真时，它的逆命题可以为真也可以为假．那么，原命题的真假性同它的否命题及逆否命题的真假性之间是否有关系呢？

1. 原命题为真，它的逆命题可以为真，也可以为假.

例 3 试证：

(1) 设 a、b、c 分别表示 $\triangle ABC$ 中 $\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 所对边的边长，命题“若 $\angle C$ 为钝角，则 $c^2>a^2+b^2$”的逆命题是真命题.

(2) 命题“两个正数之积仍为正数”的逆命题是假命题.

证 (1) 逆命题是：设 a、b、c 分别表示 $\triangle ABC$ 中 $\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 所对边的边长，若 $c^2>a^2+b^2$，则 $\angle C$ 为钝角.

利用三角形的余弦定理，

$$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}<0,\quad 且\quad 0°<\angle C<180°,$$

所以 $\angle C>90°$.

因此，(1)中命题的逆命题是真命题.

(2) 逆命题是：若 $ab>0$，则 $a>0$ 且 $b>0$.

取 $a=b=-1$，$ab>0$，但 $a<0$.

因此，(2)中命题的逆命题是假命题.

2. 原命题为真，它的逆否命题一定为真.

逆否命题不再是新命题.

事实上，逆否命题只是原命题的另一种陈述.

例如：

原命题 若 $a=0$，则 $ab=0$；

逆否命题 若 $ab\neq0$，则 $a\neq0$.

又如：

原命题 最高气温超过 30 ℃时我就开空调；

逆否命题 若我没有开空调，则最高气温不超过 30 ℃.

3. 原命题为真，它的否命题可以为真，也可以为假.

否命题是原命题的另一种形式命题吗？否命题！

例如：真命题“若 $a>0$，则 $a^2>0$”的否命题“若 $a\leqslant0$，则 $a^2\leqslant0$”是真命题，而真命题“若 $a>0$，则 $a^2>0$”的否命题“若 $a\leqslant0$，则 $a^2\leqslant0$”是假命题.

练 习

1. 写出下列命题的四种形式：

   （1）若两个三角形全等，则它们的面积相等；

   （2）若 $a>0$，则 $a^2>0$.

2. 写出命题“正方形的对角线互相垂直”的逆命题、否命题和逆否命题，并判断它们的真假.

3. “原命题为真，它的否命题一定为假”的说法是否正确，举例说明.

习题 2

学而时习之

1. 把下列命题改写成“若 p 则 q”的形式，并分别写出它们的逆命题、否命题和逆否命题：

   （1）正方形的四条边相等；

   （2）末位是 5 的整数可以被 5 整除；

   （3）当 $a>0$ 时，函数 $y=ax+b$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增.

2. 写出下列命题的逆命题、否命题和逆否命题，并分别判断它们的真假：

   （1）设 a，b，c 为任意实数，若 $a=b$，则 $ac=bc$；

   （2）到圆心的距离等于该圆半径的直线是圆的切线；

   （3）$x=5$ 是方程 $x^2-4x-5=0$ 的根.

3. 判断下列说法是否正确：

   （1）一个命题的逆命题为真，它的否命题也为真；

   （2）原命题为假，它的逆否命题也为假.

温故而知新

4. 写出下列命题的四种形式：

(1) 两个偶数之积仍是一个偶数；

(2) $\tan 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{3}$；

(3) 过直线 l 外一点能够作一条直线与直线 l 平行.

5. 试证下列两个命题的逆命题都是假命题：

(1) 设 a 是整数，若 a 是 8 的倍数，则 a^2 是 8 的倍数；

(2) 二次函数的图象一定有对称轴.

6. 写出下列命题的四种形式，并分别判断它们的真假性：

(1) 设 a，b，c 是任意三个实数，若 $a>b$，则 $ac>bc$；

(2) 函数 $y=x^2$ 在区间 $(1,+\infty)$ 上单调递增.

1.1.3 充分条件和必要条件

上节我们讨论了“若 p 则 q”这种形式的命题. 本节我们将通过命题“若 p 则 q”的真假性讨论 p 和 q 的真假性之间的联系. “若 p 则 q”为真命题指当 p 成立时，q 一定也成立，换句话说，p 成立可以推出 q 成立. 在这种情况下，记作 $p\Rightarrow q$，并把 p 叫作 q 的充分条件(sufficient condition)，q 叫作 p 的必要条件(necessary condition).

$p\Rightarrow q$ 可以理解为一旦 p 成立，q 一定也成立，即 p 对于 q 的成立是充分的；换个角度考虑，一旦 q 不成立，p 一定也不成立，即 q 对于 p 的成立是必要的.

当命题“若 p 则 q”为假命题时，记 $p\nRightarrow q$. 在这种情况下，p 是 q 的不充分条件，q 是 p 的不必要条件.

例如：“若 $a=b$，则 $a^2=b^2$”是真命题，可写成 $a=b\Rightarrow a^2=b^2$. $a=b$ 叫作 $a^2=b^2$ 的一个充分条件，$a^2=b^2$ 是 $a=b$ 的一个必要条件. 而“若 $a^2=b^2$，则 $a=b$”是假命题，可写成 $a^2=b^2\nRightarrow a=b$，$a^2=b^2$ 是 $a=b$ 的一个不充分条件，$a=b$ 是 $a^2=b^2$ 的一个不必要条件.

如果对 p 和 q，既有 $p\Rightarrow q$，又有 $q\Rightarrow p$，就记作 $p\Leftrightarrow q$. 这时，p 既是 q 的充分条件，又是 q 的必要条件，就叫作 p 是 q 的充分必要条件(sufficient and necessary condition)，简称充要条件. p 是 q 的充分

必要条件指 p 成立当且仅当(if and only if) q 成立. 在这种情况下, p 和 q 称为互相等价(equivalent). 其中 p 和 q 既可是命题, 又可是一个条件. 两个互相等价的命题通常是对同一事物从不同角度所作的描述.

例如, p: 两个三角形的两角夹边对应相等, q: 两个三角形的三边分别对应相等, $p \Leftrightarrow q$. 事实上, p 和 q 分别描述了两个三角形全等的条件.

例 1 从 "充分而不必要条件", "必要而不充分条件" 和 "充要条件" 中选择适当的一种填空.

(1) 四边形的对角线相等是该四边形为矩形的________;

(2) $a \geqslant 5$ 是 a 为正数的________;

(3) 四边形的一组对边平行且相等是四边形的两组对边分别平行的________.

解 (1) 四边形是矩形 $\Rightarrow$ 四边形的对角线相等. 因此, (1)中应填 "必要而不充分条件".

(2) $a \geqslant 5 \Rightarrow a > 0$. 因此, (2)中应填 "充分而不必要条件".

(3) 四边形的一组对边平行且相等 $\Leftrightarrow$ 四边形的两组对边分别平行, 它们实际上都在描述四边形是平行四边形. 因此, (3)中应填 "充要条件".

例 2 试证:

充分性的证明: 条件⇒结论; 必要性的证明: 结论⇒条件.

(1) 在实数范围内, $x=1$ 是 $x^2=1$ 的充分而不必要条件;

(2) 四边形的两组对边分别相等是四边形是矩形的必要而不充分条件.

证 (1) $x=1 \Rightarrow x^2=1$, $x=1$ 是 $x^2=1$ 的充分条件; 由于 $(-1)^2=1$, $x^2=1 \nRightarrow x=1$, $x=1$ 不是 $x^2=1$ 的必要条件. 因此, $x=1$ 是 $x^2=1$ 的充分而不必要条件.

(2) 记 p: 四边形的两组对边分别相等, q: 四边形是矩形. $q \Rightarrow p$, p 是 q 的必要条件. 由于平行四边形的两组对边分别相等, $p \nRightarrow q$, p 不是 q 的充分条件. 因此, 四边形的两组对边分别相等是四边形是矩形的必要而不充分条件.

例 3 指出下列各组命题中, p 是 q 的什么条件 (在 "充分而不

必要条件”、“必要而不充分条件”、“充要条件”、“既不充分也不必要条件”中选出一种）？为什么？

（1）设 x，$y\in\mathbf{R}$，p：$x^2+y^2>0$，q：x，y 都不为零；

（2）p：两个三角形的三条边对应成比例，q：两个三角形有两个角对应相等；

（3）p：$0<x<1$，q：$\sin x>0$；

（4）设 x 是整数，p：x 是 6 的倍数，q：x 是 8 的倍数.

解　（1）x，y 都不为零 $\Rightarrow x^2+y^2>0$；取 $x=0$，$y=1$，$x^2+y^2>0$，但 $x=0$，即 $p\nRightarrow q$.

分别考虑命题“若 p 则 q”和“若 q 则 p”的真假性.

所以 p 是 q 的必要而不充分条件.

（2）p 和 q 分别描述了两个三角形相似的条件，$p\Leftrightarrow q$.

所以 p 是 q 的充要条件.

（3）∵　$0<x<1<\frac{\pi}{2}$，∴　$\sin x>0$，$p\Rightarrow q$；取 $x=\frac{5}{2}\pi$，$\sin x>0$，但 $\frac{5}{2}\pi>1$，$q\nRightarrow p$.

所以 p 是 q 的充分而不必要条件.

（4）取 $x=6$，x 不是 8 的倍数，$p\nRightarrow q$；又取 $x=8$，x 不是 6 的倍数，$q\nRightarrow p$.

所以 p 是 q 的既不充分也不必要条件.

如果已知 $p\Rightarrow q$，你能想出一种证明命题 p 不成立的方法吗？

充分条件、必要条件和充要条件究竟有什么用处？事实上，很多数学知识都是由这种形式的命题给出．例如，“互相平行的平面同第三个平面相交所得的交线互相平行”，“菱形的对角线互相垂直平分”，“函数 $y=\sin x$ 的值域是 $[-1,1]$”，“设 $a>0$，$b>0$，$a+b=2\sqrt{ab}$ 当且仅当 $a=b$”．如果已知 $p\Rightarrow q$，那么证明命题 q 成立的一种方法就是证明命题 p 成立.

例 4　试证：方程 $\frac{4}{\pi}\sin x=1$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 内有解.

$a\in(0,1)$ 是方程 $\sin x=a$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 内有解的一个充分条件.

证　∵　$0<\frac{\pi}{4}<1$，由于函数 $y=\sin x$，$0<x<\frac{\pi}{2}$ 的值域是 $(0,1)$，

∴ 方程 $\sin x=\frac{\pi}{4}$ 在 $\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$ 内有解，即 $\frac{4}{\pi}\sin x=1$ 在 $\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$ 内有解.

练 习

1. 下列命题中，哪些命题是“四边形是矩形”的充分条件？

(1) 四边形的对角线相等；

(2) 四边形的两组对边分别相等；

(3) 四边形有三个内角都为直角；

(4) 四边形的两组对边分别平行且有一组对角互补.

2. 设 x，$y\in\mathbf{R}$，下列各式中哪些是“$xy\neq 0$”的必要条件？

(1) $x+y=0$；　　(2) $x^2+y^2>0$；

(3) $x^2+y^2\neq 0$；　　(4) $x^3+y^3\neq 0$.

3. 从“充分而不必要条件”、“必要而不充分条件”、“充要条件”与“既不充分又不必要条件”中选出适当的一种填空：

(1) “$\triangle ABC$ 中 $\angle C=90^\circ$”是“$\triangle ABC$ 中 $AB^2=AC^2+BC^2$”的________；

(2) “$x>0$”是“$x\geq 1$”的________；

(3) “$x=2$”是“$x^2=4$”的________.

习题 3

学而时习之

1. 从“充分而不必要条件”、“必要而不充分条件”、“充要条件”与“既不充分又不必要条件”中选出适当的一种填空：

(1) “两个角是对顶角”是“两个角相等”的________；

(2) “$a-1$ 是无理数”是“a 是无理数”的________；

(3) “$a>0$，$b>0$”是“$a+b>1$”的________；

(4) 设 a，b，c 都是整数，“ab 是 c 的倍数”是“a，b 中至少有一个是 c 的倍数”的________；

(5) “$0<x<1$”是“$x^2<x$”的________.

温故而知新

2. 指出下列各组命题中，p 是 q 的什么条件（在“充分而不必要条件”、“必要而不充分条件”、“充要条件”、“既不充分也不必要条件”中选出一种）？为什么？

(1) 设 x，y 是实数，p：$x>y$，q：$|x|>|y|$；

(2) p：$a\in \mathbf{N}_+$，q：$a\in \mathbf{Z}$；

(3) p：D 在 $\triangle ABC$ 的边 BC 的中线上，q：$\triangle ABD$ 的面积 $=\triangle ACD$ 的面积；

(4) p：$2\lg a=\lg(5a-6)$，q：$a=2$；

(5) p：小王的学习成绩优秀，q：小王是三好学生.

3. 已知一个整数的各位数字之和是3的倍数，则该整数是3的倍数. 判断下列命题中哪些是6的倍数的充分条件，哪些不是. 为什么？

(1) 整数的各位数字之和是6的倍数；

(2) 整数的各位数字之和是6的倍数且该数是偶数；

(3) 整数的末位数字是6；

(4) 整数的各位数字之和是3的倍数.

4. “$x^2\neq 1$”是“$x\neq 1$”的必要条件吗？为什么？

5. 试证“$x>1$”是“$\frac{1}{x}<1$”的充分而不必要条件.

6. 试证“$a>0$，$b>0$”的充要条件是“$a+b>0$，$ab>0$”.

7. 设 a，b，c 都是自然数，试写出“$a+b+c$ 是偶数”的一个充分而不必要条件，并说明理由.

8. 判断下列命题的真假，并说明理由.

(1) “$a>b>0$”是“$a^2>b^2$”的充要条件；

(2) “$a>b$”是“$ac^2>bc^2$”的充分条件；

(3) “$a>b$”是“$a+c>b+c$”的充要条件.

1.2 简单的逻辑联结词

人说话时或书面表达意思时，一句接着一句，句子之间需要用联结词联结，不同的联结词表达的意思有很大的差别，特别地，数学表达更需要精确和严密．本节我们讨论简单逻辑联结词．

1.2.1 逻辑联结词“非”、“且”和“或”

1．联结词“非”（not）．

设 p 是一个命题，联结词“非”是对命题 p 作否定，得到命题“非 p”或“不是 p”，记作 $\neg p$．

例 1 写出下列命题 p 的否定 $\neg p$：

(1) p：a 是大于 5 的实数；

(2) p：矩形的对角线互相垂直；

(3) p：16 不是 5 的倍数．

解 (1) $\neg p$：a 是不大于 5 的实数．

(2) $\neg p$：矩形的对角线不互相垂直．

(3) $\neg p$：16 是 5 的倍数．

由于 $\neg p$ 是命题 p 的否定，因此，p 为真命题当且仅当 $\neg p$ 为假命题．

2．联结词“且”（and）．

联结词“且”用来联结两个命题 p，q 得到新命题“p 且 q”，记作 $p\wedge q$．

“$p\wedge q$”为真命题当且仅当 p 和 q 都为真命题．可用串联电路直观地显示（如图 1－2）：当且仅当开关 p 合上且开关 q 也合上时灯才会亮．

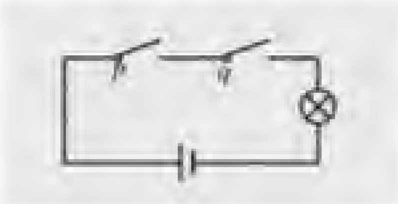


图 1－2

具体地，命题 $p\wedge q$ 的真假性由下表给出：

p	q	$p\wedge q$
真	真	真
真	假	假
假	真	假
假	假	假

例 2 根据下列命题中的 p，q，写出命题 $p\wedge q$，并判断其真假：

(1) p：矩形的对角线互相平分，q：矩形的对角线互相垂直；

(2) p：函数 $y=x^2$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，q：函数 $y=x^2$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减.

解 (1) $p\wedge q$：矩形的对角线互相垂直平分. 因为 q 为假命题，所以 $p\wedge q$ 为假命题.

(2) $p\wedge q$：函数 $y=x^2$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减，在 $(0,+\infty)$ 上单调递增. 因为 p，q 都为真命题，所以 $p\wedge q$ 为真命题.

3. 联结词"或"(or).

联结词"或"用来联结两个命题 p，q 得到新命题"p 或 q"，记作 $p\vee q$.

"$p\vee q$"为真命题当且仅当 p 和 q 中至少有一个为真命题. $p\vee q$ 可用并联电路直观地显示(如图 1－3)：当且仅当开关 p 和 q 中有一个合上时灯就会亮.

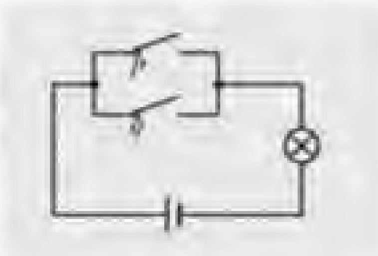


图 1－3

具体地，命题 $p\vee q$ 的真假性由下表给出：

p	q	$p \vee q$
真	真	真
真	假	真
假	真	真
假	假	假

例 3 根据下列命题的 p，q，写出命题“$p \vee q$”，并判断其真假：

（1）p：5 是集合 $\{2, 3, 4\}$ 中的元素，q：3 是集合 $\{2, 3, 4\}$ 中的元素；

（2）p：方程 $x^2+x-1=0$ 有两个正实数根，q：方程 $x^2+x-1=0$ 有两个负实数根．

解 （1）$p \vee q$：集合 $\{2, 3, 4\}$ 中含有数 5 或 3．由于 q 是真命题，$p \vee q$ 是真命题．

（2）$p \vee q$：方程 $x^2+x-1=0$ 有两个正实数根或有两个负实数根．由于 p，q 都是假命题，$p \vee q$ 是假命题．

练 习

1．把下列命题改写成 $p \vee q$ 或 $p \wedge q$ 的形式：

（1）若 $x=5$，$y=6$，则 $x>y$ 或 $x<y$；

（2）$\sqrt{2}$ 是实数且 $\sqrt{2}$ 是有理数．

2．根据下列各组命题中的 p，q，写出命题“$p \wedge q$”、“$p \vee q$”、“$\neg p$”，并判断其真假．

（1）p：10 是偶数，q：10 是质数；

（2）p：$x=1$ 是方程 $x^2-3x+2=0$ 的根，q：$x=-1$ 是方程 $x^2-3x+2=0$ 的根．

习题 4

学而时习之

1. 判断下列命题的真假：

(1) 方程 $x^2-3x-4=0$ 的判别式大于或等于 0；

(2) 正方形是轴对称图形且正三角形也是轴对称图形.

2. 根据下列各组命题中的 p，q，写出命题"$p\wedge q$"、"$p\vee q$"、"$\neg p$"，并判断其真假.

(1) p：方程 $x^2+1=0$ 没有实根，q：方程 $x^2-5=0$ 没有实根；

(2) p：矩形的四个内角都相等，q：三角形的三个内角都相等.

温故而知新

3. 分别写出由下列各组命题构成的命题"$\neg p$"、"$p\vee q$"和"$p\wedge q$"，并判断它们的真假.

(1) p：$y=\cos x$ 在 $(0, 2)$ 内单调递增，q：$y=\cos x$ 在 $(0, \pi)$ 内恒大于 0；

(2) p：2 是集合$\{2\}$中的元素，q：2 不是集合$\{3, 4, 5\}$中的元素；

(3) p：有两个角为 $30°$的三角形是锐角三角形，q：有两个角为 $30°$的三角形是直角三角形；

(4) p：方程 $x^2+3x-1=0$ 的两根符号不同，q：方程 $x^2+3x-1=0$ 的两根之和为 3.

上下而求索

4. 设 p，q 是两个命题，试证：

(1) $\neg(p\vee q)$ 是真命题当且仅当 $\neg p\wedge\neg q$ 是真命题；

(2) $\neg(p\wedge q)$ 是真命题当且仅当 $\neg p\vee\neg q$ 是真命题.

1.2.2 全称量词和存在量词

全称量词和存在量词不但在数学里经常被使用，在日常生活中也经常被使用.

例如，市场上卖鸡蛋的老太太说：“我篮子里的每个鸡蛋都是好的.”老太太正确地叙述了一个含有全称量词的命题.“每一个”是全称量词并且指出了全称量词“每一个”的作用范围是“我篮子里的鸡蛋”，不是市场上的所有鸡蛋.

在数学里也有许多使用量词的命题.

例如：对任意实数 a，$a^2+1>0$.“任意”是一个全称量词，命题中全称量词“任意”的作用范围是实数集 $\mathbf{R}$.

又如：存在某个整数 a 使得 a^2-1 是 5 的倍数.“存在某个”是存在量词，命题中它的作用范围是整数集 $\mathbf{Z}$.

“任意”、“所有”、“每一个”等叫作全称量词（universal quantifier），数学上用符号“$\forall$”表示.“存在”、“某一个”、“至少有一个”等叫作存在量词（existential quantifier），数学上用符号“$\exists$”表示.涉及量词的命题必须指出量词的作用范围.

为什么量词的作用范围如此重要?

例 1 指出下列两个含有量词的命题中使用了什么量词及量词的作用范围，并把量词用相应的数学符号取代.

(1) 对任意正实数 a，$a^2-a-2>0$；

(2) 对某个大于 10 的正整数 n，$(\sqrt{2})^n=1\,024$.

解 (1) 命题(1)中有量词“任意”，这是一个全称量词，它的作用范围是正实数集合.命题(1)可以写成“$\forall a>0$，$a^2-a-2>0$”.

(2) 命题(2)中有量词“某个”，这是一个存在量词，它的作用范围是大于 10 的正整数集合.命题(2)可以写成“$\exists n>10$，$n\in\mathbf{N}_+$，$(\sqrt{2})^n=1\,024$”.

如何判断含有量词的命题的真假呢？命题“我篮子里的每个鸡蛋都是好的”究竟是真命题还是假命题？如果篮子里的每个鸡蛋确实是好的，这个命题是真命题；只要篮子里有某一个鸡蛋是坏的，这个命题就是假命题.

需要对每一个实数 a 验证.

例如：因为对每个实数 a，$a^2+1>0$ 成立，所以命题“$\forall a\in\mathbf{R}$，$a^2+1>0$”是真命题.

又如：因为 $4^2-1=15$，所以命题“$\exists a\in\mathbf{Z}$，a^2-1 是 5 的倍数”是真命题.

找到一个 $a=4$ 就足够了.

例 2 判断下列命题的真假，并给出证明.

(1) $\forall x\in(5,+\infty)$，$f(x)=x^2-4x-2>0$；

(2) $\forall x\in(3,+\infty)$，$f(x)=x^2-4x-2>0$；

(3) $\exists a\in\mathbf{Z}$，$a^2=3a-2$；

(4) $\exists a\geqslant 3$，$a^2=3a-2$；

(5) 设 A，B，C 是平面上不在同一直线上的三点，在平面上存在某个点 P 使得 $PA=PB=PC$.

你能总结出判断含有量词的命题的真假性的要点吗？

证 (1) $\because$ $f(x)=x^2-4x-2$ 在 $(2,+\infty)$ 上单调递增，

$\therefore$ 对 $(5,+\infty)$ 内的每个 x，$f(x)>f(5)>0$. 因此(1)是真命题.

(2) $4\in(3,+\infty)$，但 $f(4)=-2<0$，因此(2)是假命题.

(3) 1 是整数且 $1^2=3\times1-2$，因此(3)是真命题.

(4) $\because$ $a^2=3a-2$ 只有两个实数根 $a=1$ 或 $a=2$，$\therefore$ 当 $a\geqslant 3$ 时，$a^2\neq 3a-2$. 因此(4)是假命题.

(5) A，B，C 三点构成一个三角形，三角形总有外接圆，设 P 是 $\triangle ABC$ 外接圆的圆心，则 $PA=PB=PC$. 因此(5)是真命题.

如何对含有量词的命题进行否定？先看下面两个例子：

(1) p：这个篮子里的鸡蛋都是好的，p'：这个篮子里有一个坏鸡蛋；

(2) q：$\exists x\in\mathbf{R}$，使得 $x^2-3x-5=0$，q'：$\forall x\in\mathbf{R}$，$x^2-3x-5\neq 0$.

你能总结出对含有量词的命题否定的方法吗？

p 是真命题当且仅当 p' 是假命题. 同样，q 是真命题当且仅当 q' 是假命题. 因此，p' 和 q' 分别是命题 p 和 q 的否定，即 $p'=\neg p$，

$q'=\neg q$. 利用数学符号可以把对含有量词的命题的否定抽象地表示为“$\neg\forall=\exists\neg$”，“$\neg\exists=\forall\neg$”.

例 3 对下面含有量词的命题作否定：

(1) p：我们班上有某个同学的身高超过 1.85 m；

(2) q：任意有理数都可以写成两个整数之商.

解 (1) 这是含有存在量词的命题，利用“$\neg\exists=\forall\neg$”得 $\neg p$：我们班上每一个同学的身高都不超过 1.85 m.

(2) 这是含有全称量词的命题，利用“$\neg\forall=\exists\neg$”得 $\neg q$：存在某个有理数它不能写成两个整数之商.

练 习

1. 指出下列命题中使用了什么量词及量词的作用范围，并把量词用相应的数学符号取代：

   (1) 对区间 $(0,\pi)$ 内的任意实数 x，$\sin x>0$；

   (2) 对某个有理数 x，$2^{x}=\frac{1}{2}$.

2. 判断下列命题的真假：

   (1) $\exists x\in\mathbf{Z}$，$x^2=2$；　　(2) $\exists x\in\mathbf{R}$，$x^2=2$.

3. 对下面含有量词的命题作否定：

   (1) 某些实数是有理数；　　(2) 我们班上每个同学都是男生.

习题 5

学而时习之

1. 对下面含有量词的命题作否定：

   (1) 每个人的寿命都是有限的；

(2) 存在某个整数 a 使得 $a^3=a$.

2. 判断下列命题的真假：

(1) $\forall x\in \mathbf{R}$，$x^2-3x+2=0$；

(2) 平面上存在一条直线是函数 $y=\sin x$ 的图象的对称轴.

温故而知新

3. 判断下列命题的真假，并给出证明：

(1) 对任意满足不等式 $3x+2>0$ 的实数 x，$2x^2-x>0$；

(2) 对任意满足不等式 $3x+2>0$ 的整数 x，$2x^2-x>0$；

(3) 存在某个正整数 a 使得函数 $y=\log_a x$ 的图象过点 $(3, 2)$；

(4) 存在某个正实数 a 使得函数 $y=\log_a x$ 的图象过点 $(3, 2)$；

(5) 已知两点 A，B，存在某个平面 α 使得平面 α 上的任意一点到 A，B 两点的距离相等；

(6) 任意两个角对应相等的两个三角形必全等.

4. 对下面含有量词的命题作否定：

(1) 已知直线 l，过直线 l 外的任意一点可以而且只可以作一条直线与已知直线 l 平行；

(2) 任意实数都可以写成平方和的形式；

(3) 每个大学生既年轻又好学.

小结与复习

一、指导思想

无论是进行思考、同他人交流，还是从事各项工作，都需要正确地运用逻辑用语表达自己的思想．在学习数学的过程中，学习常用逻辑用语可以更深刻地理解数学内容，更严密地进行数学推理以及更正确地表达数学思想．

二、内容提要

1．命题的四种形式：如果用 p 和 q 分别表示命题的条件和结论，$\neg p$ 和 $\neg q$ 表示 p 和 q 的否定，那么命题的四种形式是

原命题　若 p 则 q；

逆命题　若 q 则 p；

否命题　若 $\neg p$ 则 $\neg q$；

逆否命题　若 $\neg q$ 则 $\neg p$．

2．充分条件、必要条件、充要条件．

如果已知 $p\Rightarrow q$，那么 p 是 q 的充分条件，q 是 p 的必要条件．

如果已知 $p\Leftrightarrow q$，那么 p 是 q 的充要条件．

3．逻辑联结词“非”、“且”、“或”．

p 是真命题 $\Leftrightarrow \neg p$ 是假命题；

$p\wedge q$ 是真命题 $\Leftrightarrow p$ 和 q 都是真命题；

$p\vee q$ 是真命题 $\Leftrightarrow p$ 和 q 中至少有一个是真命题．

4．全称量词和存在量词．

含有全称量词的命题是真命题必须考虑所有的情况；

含有存在量词的命题是真命题只须考虑某一种情况；

对含有全称量词和存在量词的命题作否定可以用数学符号抽象

地表示为"$\neg\forall=\exists\neg$"、"$\neg\exists=\forall\neg$".

三、学习要求和需要注意的问题

1. 学习要求.

(1) 能写出命题的逆命题、否命题和逆否命题；

(2) 理解充分条件、必要条件和充要条件的意义以及它们在数学论证中的作用；

(3) 了解逻辑联结词"或"、"且"、"非"的含义，能正确地使用它们；

(4) 了解全称量词和存在量词的意义；

(5) 能正确地对含有一个量词的命题作否定.

2. 需要注意的问题.

(1) 命题的否命题和命题的否定是两个不同的概念；

(2) 充分性的证明是从条件推出结论，必要性的证明是从结论推出条件；

(3) 逻辑联结词"且"和"或"有很大的区别；

(4) 对含有一个量词的命题进行否定，不但量词要转换而且要对量词后面的命题作否定.

四、参考例题

例1 写出命题"p：每个有理数都是实数"的否命题及其否定.

解 p 的否定 $\neg p$ 可以写成"存在某个有理数，它不是实数"或者"并非每个有理数都是实数".

分析 p 的条件和结论．条件：a 是有理数；结论：a 是实数．因此，p 的否命题是"若 a 不是有理数，则 a 不是实数".

例2 "$x^2\neq y^2$ 是 $x\neq y$ 或 $x\neq -y$ 的充要条件"的说法是否正确？若不正确，如何修改结论使说法正确？

解 不正确．$x^2\neq y^2\Rightarrow x\neq y$ 或 $x\neq -y$ 虽然成立，但 $x\neq y$ 或 $x\neq -y$ 推不出 $x^2\neq y^2$．这是因为 $x=2$，$y=-2$ 时，$x\neq y$ 成立，

因此 $x\neq y$ 或 $x\neq -y$ 为真命题，但 $x^2\neq y^2$ 为假命题．只有当 $x\neq y$，$x\neq -y$ 同时为真时，$x^2\neq y^2$ 才为真．因此，正确的说法是"$x^2\neq y^2$ 是 $x\neq y$ 且 $x\neq -y$ 的充要条件"．

例 3 对命题"p：任意函数的图象都有且仅有一条对称轴"作否定．

解 "有且仅有一条对称轴"的否定是"没有对称轴或有一条以上的对称轴"．因此，$\neg p$：存在某个函数，它的图象或者没有对称轴或者有一条以上的对称轴．

复习题一

学而时习之

1．写出下列命题的四种形式，并判断真假：

（1）每个偶数都可以被 4 整除；

（2）每个能被写成两个奇数之和的整数都是偶数；

（3）设 E，F 是 $\triangle ABC$ 的边 AB，AC 上的点，若 E，F 是 AB，AC 的中点，则 $EF/\!/BC$；

（4）设 A，B 是两个集合，若 $A\cup B=B$，则 $A\subseteq B$．

2．设 a，$b\in\mathbf{R}$，下面左边的式子和右边的式子中哪些是可以互为充要条件的：

（1）$ab=0$；　　　　（2）$a^2+b^2=0$；

（3）$a^2+b^2>0$；　　　　（4）$a=0$ 或 $b=0$；

（5）$a=0$ 且 $b=0$；　　　　（6）$a\neq 0$ 或 $b\neq 0$．

3．作下列命题的否定：

（1）若 $x=5$，$y=3$，则 $x\geqslant y$；

（2）$\forall m>0$，方程 $x^2+x-m=0$ 有实数根；

（3）$\exists m>0$，方程 $x^2+x+m=0$ 有实数根．

温故而知新

4．写出命题“若 a，b 是偶数，则 $a+b$ 是偶数”的逆否命题．

5．写出命题“6是偶数且是3的倍数”的否定．

6．试举出一个命题的例子，使得它的四种形式的命题

（1）都是真命题；

（2）都是假命题．

7．试证：“a，b 都是整数”是“方程 $x^2+ax+b=0$ 有且仅有整数解”的必要不充分条件．

8．判断下列说法是否正确．若不正确，如何修改结论使之正确？

（1）“$|x|=3$”的充要条件是“$x=3$ 或 $x=-3$”；

（2）“$|x|\neq 3$”的充要条件是“$x\neq 3$ 或 $x\neq -3$”．

9．求方程 $3x^2-10x+a=0$ 有两个同号且不相等实根的充要条件．

10．判断下列命题的真假，并给出证明：

（1）$\forall x\in \mathbf{R}$，$\dfrac{x^2-2x+2}{x-1}\neq a$，其中 $-2<a<2$；

（2）存在某个边长为1的菱形使得它的面积等于边长为2的正三角形的面积．

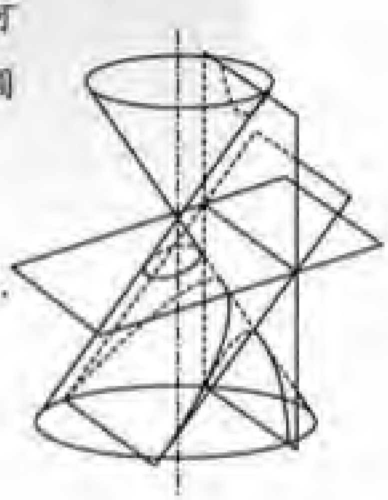
上下而求索

11．设 $x\in \mathbf{R}$．p：$x>2$ 是假命题，q：$x<3$ 是假命题，$p\vee q$：x 是实数是真命题．但当 p，q 为假命题时，$p\vee q$ 也应为假命题．问题出在哪里呢？试说出你的看法．

第 2 章

圆锥曲线与方程

平面截锥曲线三，
有开有闭各飞天.
行星绕日椭圆轨，
抛物双曲不复还.



圆、椭圆、抛物线、双曲线都可以由平面截圆锥得到．它们统称为圆锥曲线.

天上地下，圆锥曲线无处不在.

方程是研究圆锥曲线的重要工具．圆锥曲线的方程都是二次方程.

数学实验

生活中的圆锥曲线

一、实验内容和步骤

实验1 观察圆柱形的茶杯.

(1) 从茶杯的正上方观察它的上沿（也就是圆柱的上底面），是什么形状？

(2) 将茶杯放在桌面上. 坐在桌子旁边观察茶杯的上沿，是什么形状？

实验2 将圆柱形茶杯装一些水（不要装满），拿在手上，观察水面的形状.

(1) 当杯底和上沿都在水平方向时，水面是什么形状？

(2) 将茶杯倾斜，观察水面变成什么形状.

实验3 将圆柱形的茶杯换成圆台形（上底半径大，下底半径小）的饮料杯.

(1) 将饮料杯装一些水，杯的上沿和底面成水平方向时，以及逐渐倾斜时，观察水面的形状的变化；

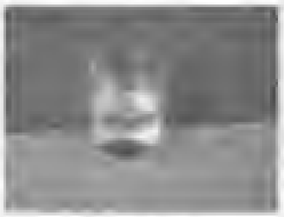
(2) 将洗脸盆装上水，将饮料杯泡在水中，使水面与杯外壁的曲面相交，观察相交所成的曲线的形状. 改变饮料杯对于水面的倾斜程度，观察所得曲线形状的变化情况.

实验4 将手电筒光照到平坦的墙面或地面上，观察照亮的区域边沿的形状. 当手电筒光正对墙面或地面时，照亮的区域的边沿是圆. 让手电筒光逐渐倾斜，观察照亮的区域边沿形状的变化.

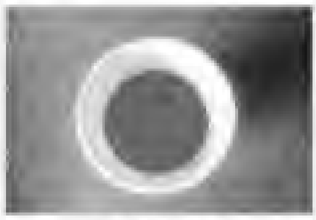
实验5 宾馆或家庭墙上的壁灯，中间是一个发光的灯泡，用一个圆台形的灯罩罩起来. 灯泡发出的光从灯罩上边和下边的圆口照射出来，在墙上照亮两块区域，观察区域边沿的曲线形状.

实验 6 观察：在体育场上掷出的铅球、投出的篮球在空中自由运动时所走的路线是什么形状？喷水池中喷出的水柱是什么形状？

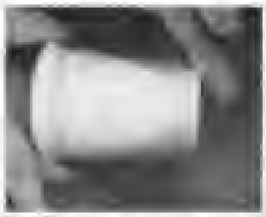
二、实验结果

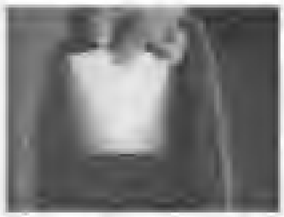

实验 1(2)


实验 2(2)


实验 3(1)-1


实验 3(1)-2


实验 3(2)-1


实验 3(2)-2


实验 4-1


实验 4-2


实验 4-3


实验 4-4


实验 5


实验 6

图 2-1 生活中的圆锥曲线

三、对实验结果的分析

实验 1 茶杯的上沿是圆形，从茶杯正上方观察到的也是圆，

但是当茶杯平放在桌面上，坐在桌子旁边观察茶杯上沿，看到的却不是圆，而像是一个横向不变、纵向被压缩得到的“扁圆”，我们称它为椭圆．

此时人的观察视线与茶杯上沿所在的平面不垂直，而是成一个角度倾斜相交．茶杯上沿横向的线段仍与我们的视线垂直，看到的长度不变．纵向的线段与视线成一个角度 α 相交，看到的长度缩短为实际长度的 $\sin\alpha$ 倍．也就是说，我们观察到的曲线，是由一个圆（实际的图形）横向不变、纵向压缩了同一个倍数得到的（图 2-2）．

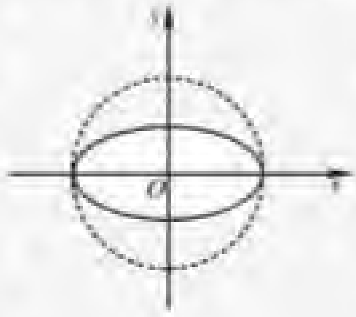


图 2-2

假如在茶杯上沿所在的平面上建立直角坐标系，以茶杯上沿的圆的圆心为原点，使 x 轴沿横向指向我们的右方，y 轴正方向沿纵向离开我们而去，则茶杯上沿的圆 $x^2+y^2=r^2$ 上每一点 $P(x,y)$ 经我们观察得到的横坐标 x' 与实际值 x 相等，纵坐标 y 却被乘了同一个小于 1 的倍数 $k=\sin\alpha$，变成 $y'=ky$．在实际曲线的方程 $x^2+y^2=r^2$ 中将 $x=x'$，$y=\frac{1}{k}y'$ 代入，得到观察到的曲线的方程

$$x'^2+\frac{y'^2}{k^2}=r^2,$$

或写为

$$\frac{x'^2}{r^2}+\frac{y'^2}{b^2}=1,$$

其中 $b=kr<r$．这个方程的图象是一个圆沿 y 轴方向被“压扁”得到的椭圆．它的横向半径仍为 r，纵向半径压缩为 b．

不妨再作以下实验来验证这个分析结果，看它是否与实际观察到的现象相吻合．

任取正数 r 作为原来的半径，适当的正数 $b<r$ 作为纵向被压缩了的“半径”．利用描点作图法或利用数学软件作图，画出方程 $\frac{x^2}{r^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的图象．

[illegible]，[illegible]、观察现象，对现象进行理论分析，必要时设计新的实验，验证理论分析的结果．

比如，取 $a=2$，$b=1$，通过描点作图或计算机软件画图作出方程 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ 的图象，观察它的形状，是否与我们在桌子旁边看到的茶杯上沿类似？

实验 2 将茶杯水平放置时，水面边沿是一个圆．将茶杯倾斜，在水面上沿倾斜方向的长度都扩大了同一个倍数，而与之垂直的方向的长度不变．圆被拉长成为椭圆．

茶杯的内侧面是圆柱面的一部分．在重力作用下平衡的水面是平面．因此，茶杯中的水面边沿实际上是圆柱面与平面相交得到的曲线．将茶杯倾斜，实际上就是让圆柱面与平面以不同的角度相交，得到"拉长程度"不同的椭圆．

实验 3 饮料杯中装水时，观察到的结果与实验 2 类似，水面边沿仍是圆或椭圆．圆台形饮料杯的内侧面是圆锥面的一部分，水面边沿实际上是圆锥面与平面的交线．

饮料杯的外侧面也是圆锥面的一部分．将饮料杯泡在水里，圆锥面的旋转轴与平面的交角可以更小，以至于相交得到的曲线不是封闭曲线，而是抛物线或双曲线．

实验 4 和实验 5

手电筒光束的边沿是圆锥面，壁灯灯泡从灯罩口漏出来的光束的边沿也是圆锥面．墙面是平面．因此，光束在墙上照亮区域的边沿仍是圆锥面与平面的交线．

实验 3，4，5 的器材和内容虽然不同，但实质上却是相同的：都是观察圆锥面与平面的交线．

实验中观察到如下曲线：圆，椭圆，抛物线，双曲线的一支．

宾馆的壁灯的灯罩通常是圆台形（上底半径小，下底半径大），从灯罩中透出的光束在墙上照亮的区域边界是两条不同的双曲线．如果特制一个圆柱形的灯罩，将灯泡固定在灯罩的中心位置，则透出的光束在墙上照亮的区域边界上下对称，是双曲线的两支．

实验 6 投出的铅球、篮球的轨道形状都是抛物线．喷出的水柱也是抛物线形状．

2.1 椭 圆

2.1.1 椭圆的定义与标准方程

实验 在平坦的纸面上钉两个大头针，分别位于点 F_1，F_2. 将一条足够长的细线的两端连接起来做一个圈，使得做成的圈的周长 p 大于 $2|F_1F_2|$，因而可以将两个大头针圈起来，并且还有余地. 用铅笔尖在任何一个位置 P 将细线圈绷紧，成为一个三角形 PF_1F_2. 将铅笔尖沿着细线圈移动，移动过程中也始终使细线圈绷紧. 观察铅笔尖在移动过程中在纸面上画出的细线形状. 如图 2-3.

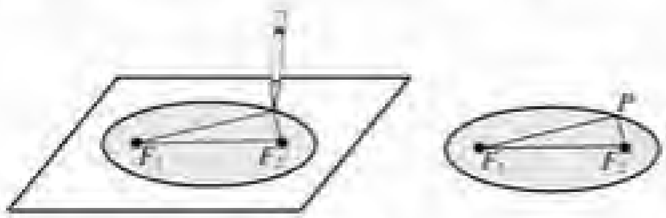


图 2-3

观察发现铅笔尖所画曲线就是我们在实验中所观察到的椭圆. 铅笔尖的位置 P 在移动过程中到两点 F_1、F_2 的距离之和 $|PF_1|+|PF_2|$ 始终等于 $p-|F_1F_2|$，保持不变. 我们根据这个几何性质来定义椭圆.

到两个定点 F_1，F_2 的距离之和为固定值(大于 $|F_1F_2|$)的点的轨迹是椭圆 (ellipse). 这两个定点叫作椭圆的焦点 (focus)，两个焦点之间的距离称为焦距 (focal length).

在平面上可以建立直角坐标系，以 F_1F_2 的中点为原点，以$\overrightarrow{F_1F_2}$的方向为 x 轴的正方向，且设焦距 $|F_1F_2|=2c>0$，则两焦点的坐标分别为 $F_1(-c, 0)$、$F_2(c, 0)$.

例 1 设平面上建立了直角坐标系使两焦点在 x 轴上并且关于原点对称，坐标分别为 $F_1(-c,0)$，$F_2(c,0)$，其中 $c>0$. 如图2-4所示. 设椭圆是到 F_1，F_2 两点距离之和为固定值 $2a$ 的点的轨迹，$2a>2c$.

求椭圆的方程.

解 平面上任一点 $P(x, y)$ 在椭圆上的充分必要条件为 $|PF_1|+|PF_2|=2a$.

由于 $|PF_1|=\sqrt{(x+c)^2+y^2}$，$|PF_2|=\sqrt{(x-c)^2+y^2}$，$(x, y)$ 所满足的条件为

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a,$$

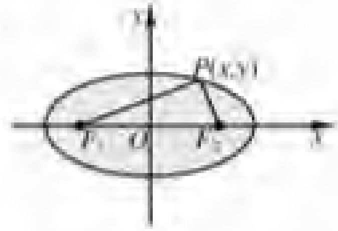


图 2－4

即 $\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2}$.

两边平方得

$$(x+c)^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+y^2.$$

整理得 $a\sqrt{(x-c)^2+y^2}=a^2-cx$.

两边再平方得 $a^2x^2-2a^2cx+a^2c^2+a^2y^2=a^4-2a^2cx+c^2x^2$.

再整理得 $(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2)$. ①

这就是椭圆的方程.

例 1 中求出的椭圆方程①可以写成更简单的形式.

由椭圆的定义知 $2a>2c$，$a>c$，故 $a^2-c^2>0$.

在①中令 $y=0$，得 $x^2=a^2$，$x=\pm a$，也就是说椭圆与 x 轴的交点为 $(-a, 0)$ 及 $(a, 0)$. 再在①中令 $x=0$，得 $y=\pm\sqrt{a^2-c^2}$. 记 $b=\sqrt{a^2-c^2}$，则椭圆与 y 轴的交点为 $(0, -b)$，$(0, b)$，椭圆的方程①变为

$$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2.$$

还可以进一步写成容易记忆的形式

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad ②$$

这称为椭圆的标准方程（standard equation），其中 $a>b>0$.

例 2 建立适当的直角坐标系，使椭圆的两个焦点在 y 轴上，关于原点对称，坐标分别为 $(0, c)$，$(0, -c)$，其中 $c>0$. 如图 2－5 所示. 椭圆上任意一点到两焦点的距离之和为 $2a(a>c)$. 求椭圆方程.

解法 1 椭圆上的点 $P(x,y)$ 满足的充分必要条件是：$|PF_1|+|PF_2|=2a$，即

$$\sqrt{x^2+(y+c)^2}+\sqrt{x^2+(y-c)^2}=2a.$$

仿照例 1 的解法可将这个方程化简为

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1，其中 b=\sqrt{a^2-c^2}>0.$$

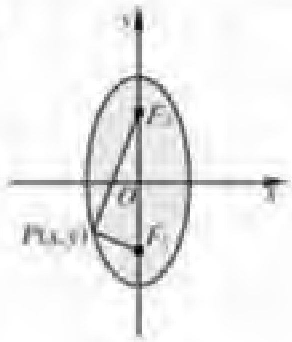


图 2-5

具体化简过程请你自己亲自写出来。

解法 2 设直线 l 过原点并且平分 $\angle xOy$．则平面上每个点 (x,y) 关于直线 l 的对称点 $(x',y')=(y,x)$，$F_1(0,-c)$，$F_2(0,c)$ 关于 l 的对称点分别是 $F_1'(-c,0)$，$F_2'(c,0)$．

记每个点 $P(x,y)$ 关于 l 的对称点为 $P'(x',y')$，则

$P(x,y)$ 满足条件 $|PF_1|+|PF_2|=2a$

$\Leftrightarrow P'(x',y')$ 满足条件 $|P'F_1'|+|P'F_2'|=2a$

$\Leftrightarrow(x',y')$ 满足椭圆的标准方程 $\dfrac{x'^2}{a^2}+\dfrac{y'^2}{b^2}=1$，其中 $b^2=a^2-c^2$．

但 $x'=y$，$y'=x$，故 (x,y) 所满足的方程为

$$\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1.$$

例 2 中得出的

$$\boxed{\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1} \qquad ②$$

也是椭圆的标准方程，它表示的椭圆的焦点在 y 轴上．

例 3 求下列椭圆的焦点坐标，以及椭圆上每一点到两焦点距离的和．

(1) $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$； (2) $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{5}=1$；

(3) $4x^2+3y^2=4$．

解 (1) 椭圆方程具有标准形式 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$，其中 $a=2$，$b=1$．因此 $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{4-1}=\sqrt{3}$，两焦点坐标为 $(-\sqrt{3},0)$，$(\sqrt{3},0)$．椭圆上每一点到两焦点的距离之和为 $2a=4$．

（2）椭圆方程具有标准形式$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$．其中$a=\sqrt{5}$，$b=2$．因此$c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{5-4}=1$．两焦点坐标为$(0,-1)$，$(0,1)$，椭圆上每一点到两焦点的距离之和为$2a=2\sqrt{5}$．

（3）将方程两边同除以4，化为$\frac{x^2}{1}+\frac{y^2}{\frac{4}{3}}=1$，具有标准形式$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$．其中$a=\sqrt{\frac{4}{3}}$，$b=1$．

因此$c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{\frac{4}{3}-1}=\frac{\sqrt{3}}{3}$．两焦点坐标为$\left(0,-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$，$\left(0,\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$，椭圆上每一点到两焦点的距离之和为$2a=\frac{4\sqrt{3}}{3}$．

例4 求下列椭圆的方程．

（1）焦点在$(-3,0)$和$(3,0)$，椭圆上每点到两个焦点的距离之和为10；

（2）焦点在$(0,-2)$和$(0,2)$，椭圆经过点$(3,2)$．

解 （1）椭圆具有标准方程$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$．已知$c=3$，$2a=10$，故$a=5$，$b^2=a^2-c^2=5^2-3^2=16$．所求方程为$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$．

（2）椭圆具有标准方程$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$．已知$c=2$，椭圆上一点$(3,2)$到两焦点的距离之和为

$$\sqrt{(3-0)^2+[2-(-2)]^2}+\sqrt{(3-0)^2+(2-2)^2}=5+3=8,$$

故$2a=8$，$a=4$，$b^2=a^2-c^2=16-4=12$．所求方程为

$$\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{16}=1.$$

练　习

1．求下列椭圆的焦点坐标，并画出草图．

(1) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$；　(2) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$；　(3) $9x^2+y^2=9$.

2. 求满足下列条件的椭圆方程.

(1) 两焦点坐标分别为 $F_1(-2, 0)$，$F_2(2, 0)$，$2a=6$；

(2) 两焦点坐标分别为 $F_1(0, -3)$，$F_2(0, 3)$，且过点 $(8, 3)$.

2.1.2 椭圆的简单几何性质

实验 选取几组不同的 $a>b>0$，做如下实验：

(1) 描点画图或利用计算机画图软件画出如下方程的图象：

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\qquad \frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1;$$

(2) 观察这些图象的如下性质：

范围：分布范围是否有限？如果有限，最左、最右、最高、最低分别到什么位置？找出最左、最右、最高、最低的点.

对称性：图象是不是中心对称图形？如果是，找出对称中心. 是不是轴对称图形？如果是，找出对称轴.

(3) 通过观察，你是否发现图象还有其他性质？如果有，试作出说明.

(4) 想一想，能否根据方程解释你所观察到的现象.

下面通过椭圆的方程讨论它的一些简单而基本的性质.

一、范围

如图 2－6 所示，我们来看图象上的点的横坐标、纵坐标的取值范围，也就是方程 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的解 (x, y) 中的 x，y 值的取值范围.

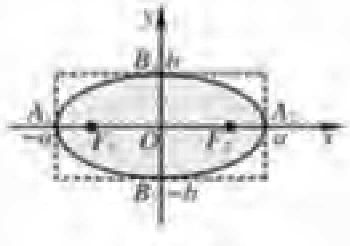


图 2－6

将 x 当作已知数，从方程中解出 y 得

$$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}.$$

要求出实数值 y，横坐标 x 满足的充分

必要条件是 $a^2-x^2\geqslant 0$，即 $|x|\leqslant a$，$-a\leqslant x\leqslant a$．因此，x 的取值范围为 $[-a,a]$．

同理，将 y 当作已知数，从椭圆方程中解出 x 得

$$x=\pm\frac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2}.$$

要求出实数值 x，纵坐标 y 满足的充分必要条件是 $b^2-y^2\geqslant 0$，即 $-b\leqslant y\leqslant b$，y 的取值范围为 $[-b,b]$．

因此，椭圆上的点 (x,y) 都被限制在 $x\in[-a,a]$，$y\in[-b,b]$ 的范围内．这个范围是由四条直线 $x=-a$，$x=a$，$y=-b$，$y=b$ 所围成的一个矩形，椭圆就在这个矩形内．

让 x 取最小值 $-a$，求出 $y=0$．因此椭圆最左边的点为 $(-a,0)$．

让 x 取最大值 a，求出 $y=0$．因此椭圆最右边的点为 $(a,0)$．

让 y 取最小值 $-b$ 和最大值 b 都求得 $x=0$．由此得到椭圆最高点为 $(0,b)$，最低点为 $(0,-b)$．

同理可知椭圆 $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$ 被限制在 $x\in[-b,b]$ 且 $y\in[-a,a]$ 的范围内，这个范围是由直线 $x=-b$，$x=b$，$y=-a$，$y=a$ 围成的矩形．这个椭圆最左、最右、最低、最高的点分别是 $(-b,0)$，$(b,0)$，$(0,-a)$，$(0,a)$．

二、对称性

1．对称中心．

平面上任一点 (x,y) 关于原点的对称点是 $(-x,-y)$．

在椭圆的标准方程 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 和 $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$ 中将 (x,y) 换成 $(-x,-y)$，椭圆方程不变，这说明了：

点 (x,y) 在椭圆上 $\Rightarrow$ 它关于原点的中心对称点 $(-x,-y)$ 也在椭圆上．

因此，这两个椭圆都是以原点为对称中心的中心对称图形，原点是它们的对称中心．

所说的两个方程都是以两个焦点的连线的中点为原点建立的直角

坐标系下的方程．对于平面上任意一个椭圆，它的两个焦点连成的线段中点是椭圆的对称中心，称为这个椭圆的中心（center）．

三、对称轴．

平面上每个点（x，y）关于 x 轴的对称点是（x，$-y$）．在椭圆的标准方程中将（x，y）换成（x，$-y$），方程不变．这说明椭圆是轴对称图形，x 轴是它的对称轴．

平面上每个点（x，y）关于 y 轴的对称点是（$-x$，y）．在椭圆方程中将（x，y）换成（$-x$，y），方程不变．这说明 y 轴也是它的对称轴．

椭圆的标准方程是以两焦点连成的线段的中点为原点、以两焦点连线为 x 轴或 y 轴得到的．因此，平面上任意一个椭圆都是轴对称图形，两焦点连线是它的对称轴，过椭圆中心、与两焦点连线垂直的直线也是对称轴．

三、顶点．

椭圆的两条对称轴与椭圆相交，共有四个交点，都称为椭圆的顶点（vertex）．比如，椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的四个顶点是 $A_1(-a,0)$，$A_2(a,0)$，$B_1(0,-b)$，$B_2(0,b)$，分别是这个椭圆最左、最右、最低、最高的点．

我们知道，经过椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的两个焦点的直线 F_1F_2 是椭圆的一条对称轴．设它与椭圆相交得到的两个顶点是 A_1，A_2，这两个顶点之间的线段 A_1A_2 称为这个椭圆的长轴（major axis），它的长度等于 $2a$．椭圆的中心 O 将长轴分成两条长度相等的线段 OA_1，OA_2，都叫作长半轴（major half axis），长半轴的长度等于 a．

过椭圆的中心，并且与长轴垂直的直线是椭圆的另一条对称轴．它与椭圆相交得到另外两个顶点 B_1，B_2，这两个顶点之间的线段 B_1B_2 称为这个椭圆的短轴（minor axis），它的长度等于 $2b$．椭圆的中心将短轴分成两条长度相等的线段 OB_1，OB_2，都叫作短半轴（minor half axis），短半轴的长度等于 b．

我们知道，椭圆可以由圆压缩（或"拉伸"）得到．经过这样的压缩之后，圆的每条半径变成连接椭圆中心与椭圆上的一点的线段，其中最长的就是长半轴，最短的就是短半轴．圆的大小由半径决定，椭圆的形状和大小由长半轴长 a 和短半轴长 b 决定．

例1 下列方程的图象是什么曲线？并说出图象的分布范围．

(1) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$；

(2) $9x^2+4y^2=1$；

(3) $4x^2+4y^2=1$.

解 (1) 这是椭圆的标准方程，图象是椭圆．中心在原点．长轴在 x 轴上，长为6．短轴在 y 轴上，长为4.

图象在直线 $x=\pm3$，$y=\pm2$ 所围的矩形内.

(2) 方程具有标准形式 $\frac{x^2}{\left(\frac{1}{3}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}=1$，图象是椭圆．中心在原点．长轴在 y 轴上，长为1．短轴在 x 轴上，长为 $\frac{2}{3}$.

图象在直线 $x=\pm\frac{1}{3}$，$y=\pm\frac{1}{2}$ 所围的矩形内.

(3) 方程可写为 $x^2+y^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2$，是圆的标准方程，图象是以原点为圆心、$\frac{1}{2}$ 为半径的圆.

图象在直线 $x=\pm\frac{1}{2}$，$y=\pm\frac{1}{2}$ 所围的正方形内.

例2 过两点 $P_1(2,2)$、$P_2(-3,-1)$ 作一个椭圆，使它的中心在原点，焦点在 x 轴上．求椭圆的方程，以及椭圆的长半轴、短半轴的长度.

解 椭圆方程具有标准形式 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$．将两已知点坐标代入得

$$\frac{4}{a^2}+\frac{4}{b^2}=1, \qquad ①$$

$$\frac{9}{a^2}+\frac{1}{b^2}=1. \qquad ②$$

将 $\frac{1}{a^2}$、$\frac{1}{b^2}$ 看作未知数，则这两个式子组成二元一次方程组.

②式×4－①得 $\frac{32}{a^2}=3$，即 $\frac{1}{a^2}=\frac{3}{32}$.

$$\frac{1}{b^2}=\frac{1}{4}-\frac{1}{a^2}=\frac{1}{4}-\frac{3}{32}=\frac{5}{32}.$$

故椭圆方程为$\frac{3}{32}x^2+\frac{5}{32}y^2=1$.

长半轴长$a=\sqrt{\frac{32}{3}}=\frac{4}{3}\sqrt{6}$，短半轴长$b=\sqrt{\frac{32}{5}}=\frac{4}{5}\sqrt{10}$.

例 3 对不同的实数值m，讨论直线$y=x+m$与椭圆$\frac{x^2}{4}+y^2=1$的位置关系.

解 直线与椭圆的公共点的坐标就是下面的方程组的解：

$$\begin{cases} y=x+m, & ① \\ \frac{x^2}{4}+y^2=1. & ② \end{cases}$$

将①代入②得

$$\frac{x^2}{4}+(x+m)^2=1,$$

整理得

$$5x^2+8mx+4m^2-4=0. \qquad ③$$

此方程的实数解的个数由它的判别式Δ决定.

$$\Delta=(8m)^2-4\times5(4m^2-4)=16(5-m^2).$$

当$-\sqrt{5}<m<\sqrt{5}$时，$\Delta>0$，方程③有两个不同的实数根，代入①可得到两个不同的公共点坐标. 此时直线与椭圆有两个公共点，它们相交.

当$m=-\sqrt{5}$或$m=\sqrt{5}$时，$\Delta=0$，方程③有两个相等的实数根，代入①得到一个公共点坐标. 此时直线与椭圆有一个公共点. 从图象上观察到它们在这一点相切.

当$m<-\sqrt{5}$或$m>\sqrt{5}$时，$\Delta<0$，方程③没有实数根，直线与椭圆没有公共点.

想一想，辨一辨，任意一条直线与椭圆的位置关系是否仅有上述三种不同的情况.

练 习

1. 指出下列各椭圆的中心、焦点坐标、顶点坐标、长半轴长、短半轴长.

(1) $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{9}=1$；　　　　(2) $\frac{x^2}{169}+\frac{y^2}{144}=1$；

(3) $4x^2+9y^2=1$.

2. 试判断直线 $y=mx+1$ 与椭圆$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 的交点的个数，并说明理由.

习题 1

学而时习之

1. 判断下列方程是否表示椭圆．若是，指出该椭圆的焦点坐标．

(1) $2x^2+y^2=1$；　　　　(2) $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{3}=4$；

(3) $2x^2+3y^2=6$；　　　　(4) $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}=1$.

2. 求下列椭圆的焦点坐标，并画出简图．

(1) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$；　　　　(2) $\frac{y^2}{9}+\frac{x^2}{16}=1$；

(3) $4x^2+y^2=1$.

3. 已知椭圆的中心在原点，对称轴为坐标轴，并满足下列条件，求它们的方程．

(1) $a=\sqrt{2}$，$b=1$；

(2) $a=3$，$c=1$；

(3) 焦点为 $F_1(-2, 0)$，长轴长为 8；

(4) 焦点为 $F_1(0, -3)$，短半轴长为 8；

(5) 经过两点 $A\left(1, \frac{3}{2}\right)$，$B(2, 0)$；

(6) 经过两点 $P\left(\frac{3}{5}, -4\right)$，$Q\left(-\frac{4}{5}, 3\right)$.

温故而知新

4. 已知椭圆方程为$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ 的左、右焦点分别为 F_1，F_2，过左焦点 F_1 的直线

交椭圆于 A，B 两点，求三角形 ABF_1 的周长.

5. $\triangle ABC$ 的周长为 18，A，B 两点的坐标分别为 $A(-4,0)$，$B(4,0)$，求点 C 的轨迹方程.

6. 已知点 $(4,2)$ 是直线 l 被椭圆 $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{9}=1$ 所截得的线段的中点，求直线 l 的方程.

7. 已知地球运行的轨道是椭圆，太阳在这个椭圆的一个焦点上. 这个椭圆的长半轴长 $a=1.50\times 10^8$ km，半焦距与长半轴长之比 $\frac{c}{a}=0.0192$. 求地球到太阳的最大和最小距离.

2.2 双曲线

2.2.1 双曲线的定义与标准方程

我们知道，到两个定点距离之和为定值的点的轨迹是椭圆. 很自然想到，到两点距离之差为定值的点的轨迹是什么曲线呢？

先通过实验将这样的曲线画出来，观察它们的形状.

实验 任给两个定点 F_1，F_2 以及固定的长度 $2a>0$. 设计适当的方法或装置画出到 F_1 和 F_2 的距离之差等于 d 的点的轨迹，观察轨迹的形状.

注意：我们希望点的轨迹是一条曲线，至少应有直线 F_1F_2 之外的点 P，在 $\triangle PF_1F_2$ 中应当有 $|PF_1|-|PF_2|<|F_1F_2|$，即 $2a<2c$，故应有 $a<c$.

方法 1 描点作图，如图 2-7，先作满足条件 $|PF_1|-|PF_2|=2a$ 的点 P 的轨迹.

设 $|F_1F_2|=2c$. 先在线段 F_1F_2 上找出轨迹上的点 A. 由 $|F_1A|+|AF_2|=2c$ 及 $|F_1A|-|AF_2|=2a$ 可解出 $|AF_1|=\frac{2c-2a}{2}=c-a$，由此可在 F_1F_2 上作出 A.

图2-7

以 F_2 为圆心、适当的长度 $d>0$ 为半径画圆弧，再以 F_1 为圆心、$2a+d$ 为半径画圆弧. 所谓"适当的长度 d"，就是要使上述两弧相交，也就是 $2a+d+d>2c$，即 $d>c-a$. 设交点为 P_1，P_2，则 P_1，P_2 都是轨迹上的点.

选择不同的长度 $d>c-a$，作出轨迹上一系列点，依次连成光滑曲线，即得轨迹的一部分的近似形状.

以同样的方法可以画出满足条件 $|PF_2|-|PF_1|=2a$ 的点的轨迹.

方法2 如图2-8，取一条拉链，拉开一部分. 在拉链的一边上取定一点 E_1，设 E_1' 是另一边上在拉链拉开之前与 E_1 重合的点，在 E_1' 所在那一边上取点 E_2 使 E_2 比 E_1 更接近拉链头，并且 $|E_2E_1'|=2a$，用大头针将 E_1，E_2 分别固定在画图纸上的点 F_1，F_2. 将铅笔尖放在拉链张开处 P 将拉链绷紧，则 $|PF_1|-|PF_2|=2a$. 随着拉链的拉开，铅笔尖画出的曲线就是所求轨迹的一部分.

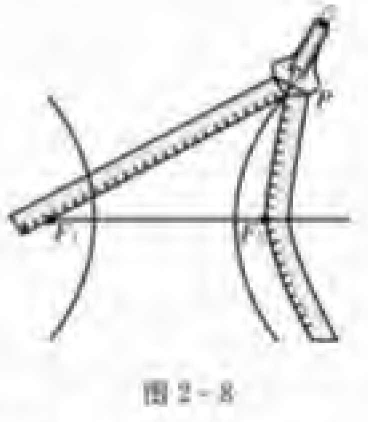


图2-8

同理可以画出满足条件 $|PF_2|-|PF_1|=2a$ 的点的轨迹.

观察发现，以上画出来的曲线形状像是初中数学中学过的反比例

函数 $y=\frac{k}{x}$ 的图象——双曲线.

平面上到两个固定点 F_1，F_2 的距离的差的绝对值等于固定值（小于 $|F_1F_2|$）的点的轨迹叫作双曲线（hyperbola）. 两个固定点 F_1，F_2 称为双曲线的焦点. 两个焦点之间的距离叫作双曲线的焦距.

双曲线由两条曲线组成：其中一条是满足条件 $|PF_1|-|PF_2|=2a$ 的点 P 的轨迹，另一条是满足条件 $|PF_2|-|PF_1|=2a$ 的点 P 的轨迹. 两条曲线互不相连，其中每一条叫作双曲线的一支. 双曲线由这两支共同组成.

例1 如图 2－9 所示，建立适当的坐标系，求双曲线的方程.

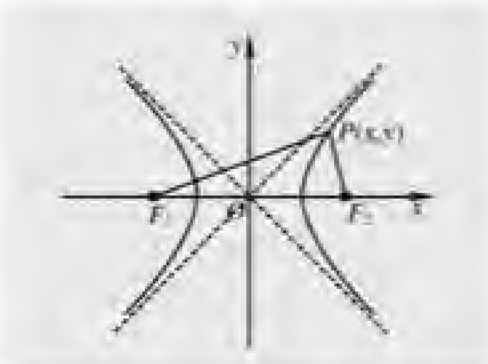


图 2－9

解 以 F_1F_2 的中点 O 为原点，$\overrightarrow{OF_2}$ 的方向为 x 轴正方向建立直角坐标系. 则两个焦点的坐标分别是 $F_1(-c, 0)$，$F_2(c, 0)$.

轨迹上的点 $P(x, y)$ 满足的充分必要条件是

$$|PF_1|-|PF_2|=\pm 2a.$$

即 $$\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}=\pm 2a,$$

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=\sqrt{(x-c)^2+y^2}\pm 2a.$$

两边平方得 $$(x+c)^2+y^2=(\sqrt{(x-c)^2+y^2}\pm 2a)^2,$$

整理得 $$cx-a^2=\pm a\sqrt{(x-c)^2+y^2}.$$

两边再平方得 $$c^2x^2-2a^2cx+a^4=a^2x^2-2a^2cx+a^2c^2+a^2y^2,$$

再整理得 $$(c^2-a^2)x^2-a^2y^2=a^2(c^2-a^2). \quad ①$$

这就是双曲线的方程.

例1中求出的方程①可以化为更简单的形式.

由双曲线的定义知 $2a=||PF_1|-|PF_2||<|F_1F_2|=2c$，$a<c$，故可令 $b=\sqrt{c^2-a^2}$，方程①变为

$$b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2.$$

还可以进一步写成容易记忆的形式

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad ②$$

这称为双曲线的标准方程，其中 $a>0$，$b>0$。它表示的双曲线的焦点在 x 轴上，坐标分别为 $(-c,0)$，$(c,0)$，$c=\sqrt{a^2+b^2}$，而双曲线上的点到两个焦点的距离之差的绝对值等于 $2a$.

例 2 如图 2-10 所示，设双曲线的焦点在 y 轴上，坐标分别为 $(0,-c)$，$(0,c)$，双曲线上任一点到两个焦点的距离之差的绝对值等于 $2a$ $(a<c)$，求双曲线的方程.

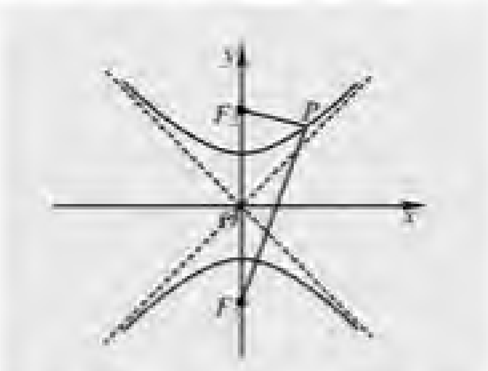


图 2-10

解 设直线 l 过原点并且平分 $\angle xOy$，则平面上每个点 (x,y) 关于直线 l 的对称点 $(x',y')=(y,x)$.

$F_1(0,-c)$，$F_2(0,c)$ 关于 l 的对称点分别是 $F_1'(-c,0)$，$F_2'(c,0)$.

记每个点 $P(x,y)$ 关于 l 的对称点为 $P'(x',y')$，则

$P(x,y)$ 满足条件 $|PF_1|-|PF_2|=\pm 2a$

$\Leftrightarrow P'(x',y')$ 满足条件 $|P'F_1'|-|P'F_2'|=\pm 2a$

$\Leftrightarrow \dfrac{x'^2}{a^2}-\dfrac{y'^2}{b^2}=1$，其中 $b^2=c^2-a^2$.

但 $x'=y$，$y'=x$，故 (x,y) 所满足的方程为

$$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1.$$

例2得出的方程

$$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1 \qquad ②$$

也称为双曲线的标准方程．它表示的双曲线的焦点在 y 轴上．

例3 已知双曲线的两个焦点坐标$(-4,0)$，$(4,0)$，双曲线上任一点到两个焦点的距离之差的绝对值等于6．求双曲线的方程．

解 双曲线的焦点在 x 轴上，坐标分别为$(-c,0)$，$(c,0)$，$c=4$．故双曲线方程具有标准形式

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.$$

其中 $a=\frac{6}{2}=3$，$b^2=c^2-a^2=4^2-3^2=7$．故双曲线的方程为

$$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{7}=1.$$

例4 已知双曲线的两个焦点坐标$(-4,0)$，$(4,0)$，并且双曲线经过点 $P(4,6)$．求双曲线的方程．

解 点 $P(4,6)$到两焦点 $F_1(-4,0)$，$F_2(4,0)$的距离之差为

$$|PF_1|-|PF_2|=\sqrt{[4-(-4)]^2+(6-0)^2}-6=10-6=4.$$

也就是说 $2a=4$，$a=2$．

又 $c=4$，故 $b=\sqrt{c^2-a^2}=\sqrt{4^2-2^2}=2\sqrt{3}$．

双曲线的标准方程具有形式$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$．将 $a=2$，$b=2\sqrt{3}$代入，就得到双曲线的方程

$$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1.$$

练 习

1．求适合下列条件的双曲线的标准方程：

(1) 两焦点坐标为 $(0,\ -5)$，$(0,\ 5)$，且 $a=4$；

(2) 两焦点坐标为 $(0,\ -6)$，$(0,\ 6)$，且经过点 $(2,\ -5)$.

2. 方程 $\frac{x^2}{2+m}-\frac{y^2}{m+1}=1$ 表示双曲线，求 m 的范围.

2.2.2 双曲线的简单几何性质

实验 任意选取 $a>0$，$b>0$，用描点作图法或计算机软件作出双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 的图形，如图 2－11 所示. 观察图形，研究它的如下性质：

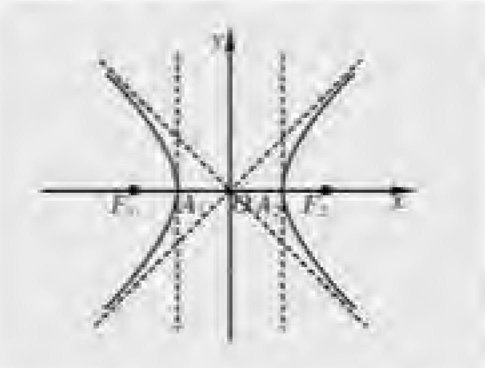


图 2－11

1. 范围：曲线是否分布在一个有限的范围之内？或者在某一个范围之外？

2. 对称性：曲线是不是中心对称图形？如果是，找出对称中心. 曲线是不是轴对称图形？如果是，找出对称轴.

3. 你所观察到的其他性质.

比如，当曲线无限延伸时的趋势，双曲线的一支与抛物线有什么区别.

以下通过双曲线的标准方程 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 来研究双曲线的一些简单性质.

一、范围

将 x 当作已知数，从方程中解出

$$y=\pm\frac{b\sqrt{x^2-a^2}}{a}. \quad ①$$

要求出实数值 y，实数值 x 的允许范围是 $|x|\geqslant a$，即 $x\in(-\infty,-a]\cup[a,\infty)$. 双曲线的两支分别位于直线 $x=-a$ 左侧和直线 $x=a$ 右侧，向左右两方无限延伸.

将 y 当作已知数，从方程中解出 $x=\pm\frac{a\sqrt{y^2+b^2}}{b}$，$y$ 的允许值范围是全体实数.

由表达式①还可以更精细地描述双曲线分布的范围. 双曲线上的点的坐标 (x, y) 满足条件

$$|y|=\frac{b\sqrt{x^2-a^2}}{a}<\frac{b\sqrt{x^2}}{a}=\frac{b}{a}|x|.$$

当 $x\geqslant a$ 时，$-\frac{b}{a}x<y<\frac{b}{a}x$；当 $x\leqslant -a$ 时，$-\frac{b}{a}x>y>\frac{b}{a}x$.

因此，双曲线处于两条直线 $y=\pm\frac{b}{a}x$ 所围成的包含 x 轴在内的那两个区域中，并且在直线 $x=-a$，$x=a$ 所围成的区域外侧，如图2-11.

二、对称性

将 (x, y) 分别换成 $(-x, -y)$，$(x, -y)$ 和 $(-x, y)$，双曲线方程都不变. 可见双曲线关于原点，x 轴，y 轴都是对称的，原点是它的对称中心，两条坐标轴都是它的对称轴.

双曲线的对称中心称为它的中心.

三、顶点

双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 与它的对称轴 x 轴有两个交点 $A_1(-a, 0)$，$A_2(a, 0)$，都称为双曲线的顶点. 这两个顶点之间的线段 A_1A_2 叫作双曲线的实轴(real axis)，长度为 $2a$. 实轴 A_1A_2 被中心 O 分成两条长度相等的线段 OA_1，OA_2，它们的长度 a 称为双曲线的实半轴长.

双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 与它的另一条对称轴 y 轴没有交点. 但我们仍

将这条对称轴上两点 $B_1(0,-b)$、$B_2(0,b)$之间的线段 B_1B_2 称为双曲线的虚轴(imaginary axis)，它的长度等于 $2b$，这个长度的一半 b 称为虚半轴长.

四、渐近线

我们已经知道双曲线处于两条相交直线 $y=\pm\frac{b}{a}x$ 所围成的、包含 x 轴在内的两个区域中. 从图象上看，双曲线的两支向两端无限延伸，越来越接近于这两个区域的边界直线 $y=\pm\frac{b}{a}x$. 我们通过方程来研究双曲线接近这两条直线的程度.

在双曲线方程$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 中将 x 当作已知数，解出

$$y=\frac{\pm b\sqrt{x^2-a^2}}{a}.$$

我们先来研究双曲线中 $x\geqslant a$ 的一支. 先来考察这支曲线向右上方接近于直线 $y=\frac{b}{a}x$ 的程度. 为此，对同样的横坐标 x，计算出直线 $y=\frac{bx}{a}$与双曲线 $y=\frac{b\sqrt{x^2-a^2}}{a}$上的点的纵坐标之差

$$d=\frac{bx}{a}-\frac{b\sqrt{x^2-a^2}}{a}=\frac{b(x-\sqrt{x^2-a^2})}{a}$$

$$=\frac{ba^2}{a(x+\sqrt{x^2-a^2})}=\frac{ba}{x+\sqrt{x^2-a^2}}.$$

随着 x 的无限增大，分母 $x+\sqrt{x^2-a^2}$ 无限增大，分子 ba 不变. 因此，d 无限接近于 0，这说明双曲线在右上方无限接近于直线 $y=\frac{b}{a}x$. 同理可知，当 x 无限增大时，双曲线 $y=-\frac{b\sqrt{x^2-a^2}}{a}$ 与直线 $y=-\frac{b}{a}x$ 上具有相同横坐标 x 的点无限接近，双曲线向右下方无限接近于直线 $y=-\frac{b}{a}x$.

由于双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$与直线$y=\frac{b}{a}x$及$y=-\frac{b}{a}x$都是关于原点成中心对称的图形，由双曲线向右上方无限接近于直线$y=\frac{b}{a}x$知道它向左下方也无限接近于这条直线．由双曲线向右下方无限接近于直线$y=-\frac{b}{a}x$知道它向左上方也无限接近于这条直线．

双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$在无限延伸的过程中无限接近于两条直线$y=\pm\frac{b}{a}x$，这两条直线称为双曲线的渐近线（asymptote）．

过实轴的两个顶点$A_1(-a,0)$，$A_2(a,0)$作平行于虚轴的直线$x=\pm a$，过虚轴的两个顶点$B_1(0,-b)$，$B_2(0,b)$作平行于实轴的直线$y=\pm b$，这四条直线围成一个矩形．矩形的两条对角线所在的直线就是双曲线的两条渐近线$y=\pm\frac{b}{a}x$．

在双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$和它的渐近线$y=\pm\frac{b}{a}x$的方程中将$x$与$y$互换，就得到双曲线$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$的渐近线方程$x=\pm\frac{b}{a}y$，即$y=\pm\frac{a}{b}x$．

例1 求双曲线$4y^2-9x^2=-4$的实半轴长、虚半轴长、焦点坐标、渐近线方程，并画出曲线的草图．

解 两边同除以-4，化成标准方程$\frac{x^2}{\frac{4}{9}}-\frac{y^2}{1}=1$．

可见实半轴长$a=\sqrt{\frac{4}{9}}=\frac{2}{3}$，虚半轴长$b=1$．

$c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{\frac{4}{9}+1}=\frac{\sqrt{13}}{3}$，焦点坐标为$\left(\pm\frac{\sqrt{13}}{3},0\right)$．

渐近线方程为$y=\pm\frac{b}{a}x$，即$y=\pm\frac{3}{2}x$．

为画出双曲线的草图，在坐标系中画出渐近线$y=\pm\frac{3}{2}x$，顶点$\left(\pm\frac{2}{3},0\right)$．算出双曲线在第一象限内一点的坐标，比如取$y=1$算出

$x=\frac{2\sqrt{2}}{3}\approx 0.94$. 可见点$(0.94, \pm 1)$在双曲线上．将一、四象限内已知的三点$(0.94, -1)$, $\left(\frac{2}{3}, 0\right)$, $(0.94, 1)$依次连成光滑曲线并让它逐步接近渐近线，画出一、四象限内双曲线的一支．由对称性可画出位于二、三象限内的另一支，如图 2 - 12.

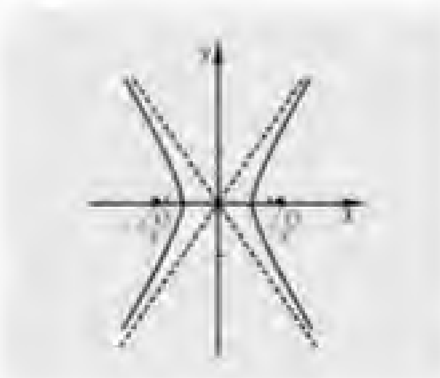


图 2 - 12

例 2 已知双曲线的两焦点坐标 $F_1(0, -2)$, $F_2(0, 2)$, 以及双曲线上一点 P 的坐标 $(3, -2)$．求双曲线的方程、顶点坐标和渐近线方程.

解 $2a=|PF_2|-|PF_1|=\sqrt{(3-0)^2+(-2-2)^2}-3=5-3=2$,

$a=1$.

$b=\sqrt{c^2-a^2}=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$.

双曲线的焦点在 y 轴上，方程具有标准形式$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$，为

$$y^2-\frac{x^2}{3}=1.$$

顶点坐标为$(0, \pm 1)$. 渐近线方程为 $y=\pm\frac{a}{b}x$，即 $y=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}x$.

例 3 以下方程的图象是不是双曲线？如果是，求它的焦点坐标、顶点坐标和渐近线方程.

(1) $4x^2-5y^2=-20$; (2) $4x^2-5y^2=1$; (3) $4x^2-5y^2=0$.

解 (1) 将方程两边同除以-20，化为$\frac{y^2}{4}-\frac{x^2}{5}=1$. 这个方程具

有形式$\dfrac{y^2}{a^2}-\dfrac{x^2}{b^2}=1$，其中 $a=2$，$b=\sqrt{5}$. 这是实轴在 y 轴上的双曲线的标准方程，图象是双曲线. 顶点坐标为$(0,\pm 2)$.

半焦距 $c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{4+5}=3$. 两个焦点的坐标分别是$(0,\pm 3)$.

渐近线方程是 $y=\pm\dfrac{2}{\sqrt{5}}x$，即 $y=\pm\dfrac{2}{5}\sqrt{5}x$.

(2) 方程具有标准形式$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$，其中 $a=\dfrac{1}{2}$，$b=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$. 图象是实轴在 x 轴上的双曲线. 顶点坐标为$\left(\pm\dfrac{1}{2},0\right)$.

半焦距$\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{5}}=\dfrac{3}{10}\sqrt{5}$，焦点坐标为$\left(\pm\dfrac{3}{10}\sqrt{5},0\right)$.

渐近线方程为 $y=\pm\dfrac{b}{a}x$，即 $y=\pm\dfrac{2}{5}\sqrt{5}x$.

(3) 方程即$(2x+\sqrt{5}y)(2x-\sqrt{5}y)=0$，图象由两条直线 $2x+\sqrt{5}y=0$ 和 $2x-\sqrt{5}y=0$ 共同组成，不是双曲线. 这两条直线也就是 $y=\pm\dfrac{2}{5}\sqrt{5}x$，是本题 (1)、(2) 两小题中的双曲线的共同的渐近线.

一般地，对任意 A，$B>0$，方程 $A^2x^2-B^2y^2=0$ 的图形是两条直线 $Ax\pm By=0$，它们是双曲线 $A^2x^2-B^2y^2=C\ (C\neq 0)$ 的渐近线.

在初中学习反比例函数时就知道它的图象是双曲线. 只不过这个双曲线是“斜着”摆放的. 我们将它重新摆放使实轴在 x 轴上，中心在原点，求标准方程.

例 4 反比例函数 $y=\dfrac{1}{x}$的图象是双曲线，两条坐标轴是它的渐近线. 求它的实半轴长和半焦距. 以它的中心为原点，实轴所在的直线为 x 轴重新建立直角坐标系，求双曲线在这个坐标系中的方程.

解 如图 2-13(a) 所示，图象的对称轴是直线 $y=x$. 对称轴与双曲线 $y=\dfrac{1}{x}$的交点坐标满足条件 $x=\dfrac{1}{x}$，可解得 $x=\pm 1$. 因此两交点坐标分别为$(1,1)$，$(-1,-1)$，这就是双曲线的两个顶点 A_1，A_2 的坐标. 两顶点的距离

$$|A_1A_2|=\sqrt{[1-(-1)]^2+[1-(-1)]^2}=2\sqrt{2}.$$

因此实半轴长 $a=\dfrac{1}{2}|A_1A_2|=\sqrt{2}$.

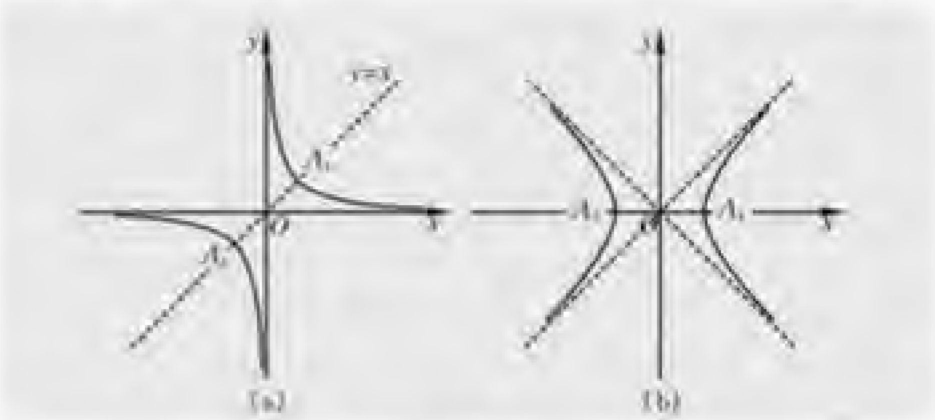


图 2-13

图象的两条渐近线的夹角为直角，渐近线与实轴之间的夹角为 $\frac{\pi}{4}$，因此

$$\frac{b}{a}=\tan\frac{\pi}{4}=1,\qquad b=a=\sqrt{2},$$

$$c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{2+2}=2.$$

半焦距 $c=2$.

所求方程具有双曲线的标准方程的形式 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$，将 $a=b=\sqrt{2}$ 代入得 $\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}=1$. 如图 2-13(b).

例 5 讨论双曲线 $x^2-y^2=1$ 与直线有哪几种可能的位置关系.

解 直线 l 与双曲线的公共点的坐标就是它们的方程的公共解.

先设直线不平行于 y 轴，方程为 $y=kx+b$，讨论方程组

$$\begin{cases} y=kx+b, & ① \\ x^2-y^2=1 & ② \end{cases}$$

的解.

将①代入②，得到 $x^2-(kx+b)^2=1$，整理得

$$(k^2-1)x^2+2kbx+b^2+1=0. \qquad ③$$

先设 $k^2=1$，即 $k=\pm1$. 如果此时还有 $b=0$，则方程③变为 $1=0$，无解，直线与双曲线无公共点. 事实上，此时直线为 $y=x$ 或 $y=-x$，就是双曲线的渐近线，当然与双曲线无公共点.

现在设 $k=\pm1$ 且 $b\neq0$，也就是直线平行于两条渐近线中的一

条．此时方程③成为一元一次方程，有唯一解，①、②组成的方程组有唯一一组解，直线与双曲线相交于一个公共点．

现在设 $k\neq\pm1$，$k^2\neq1$，方程③是一元二次方程．判别式

$$\Delta=4k^2b^2-4(k^2-1)(b^2+1)=4(b^2-k^2+1).$$

当 $\Delta>0$ 即 $b^2>k^2-1$ 时，方程③有两组解，直线与双曲线相交，有两个交点．这种情形当 $k^2<1$ 时一定发生．也就是说，当 $|k|<1$ 时，直线 $y=kx+b$ 与双曲线一定相交于两个交点；

当 $\Delta<0$ 即 $b^2<k^2-1$ 时，方程③无解，直线与双曲线无公共点．这种情况仅当 $|k|>1$ 时才有可能发生．

当 $|k|>1$ 且 $b^2=k^2-1$（即 $|b|=\sqrt{k^2-1}$）时，方程③有两个相等的实数根，直线与双曲线有一个公共点．实际上，当 $k>1$ 固定不变，由 $|b|>\sqrt{k^2-1}$ 连续变化为 $|b|=\sqrt{k^2-1}$ 的时候，直线与双曲线的两个公共点趋于重合，变成一个公共点，直线与双曲线相切于这个公共点．

现在设直线平行于 y 轴，方程为 $x=m$，讨论方程组

$$\begin{cases}x=m, & ①'\\ x^2-y^2=1 & ②\end{cases}$$

的解．

将①′代入②，整理得

$$y^2=m^2-1. \qquad ③'$$

当 $m^2-1<0$ 即 $-1<m<1$ 时，方程③′无实数根，直线与双曲线无公共点．

当 $m^2-1>0$ 即 $m<-1$ 或 $m>1$ 时，方程③′有两个不同的实数根，直线与双曲线相交，有两个交点．

当 $m^2-1=0$ 即 $m=-1$ 或 $m=1$ 时，方程③′有两个相等的实数根，直线与双曲线有唯一的公共点 $(-1,0)$ 或 $(1,0)$，这个公共点就是双曲线的一个顶点，直线与双曲线相切于这个顶点．

综上所述，直线与双曲线 $x^2-y^2=1$ 有如下 5 种位置关系：

1．直线是双曲线的渐近线．

2. 直线不是双曲线的渐近线，并且与双曲线无公共点.

3. 直线平行于双曲线的一条渐近线，与双曲线相交于一个交点.

4. 相交于两个交点.

5. 相切于一个公共点.

对于一般的双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$作同样的讨论，可以发现它与直线的位置关系也是上述 5 种. 如图 2－14.

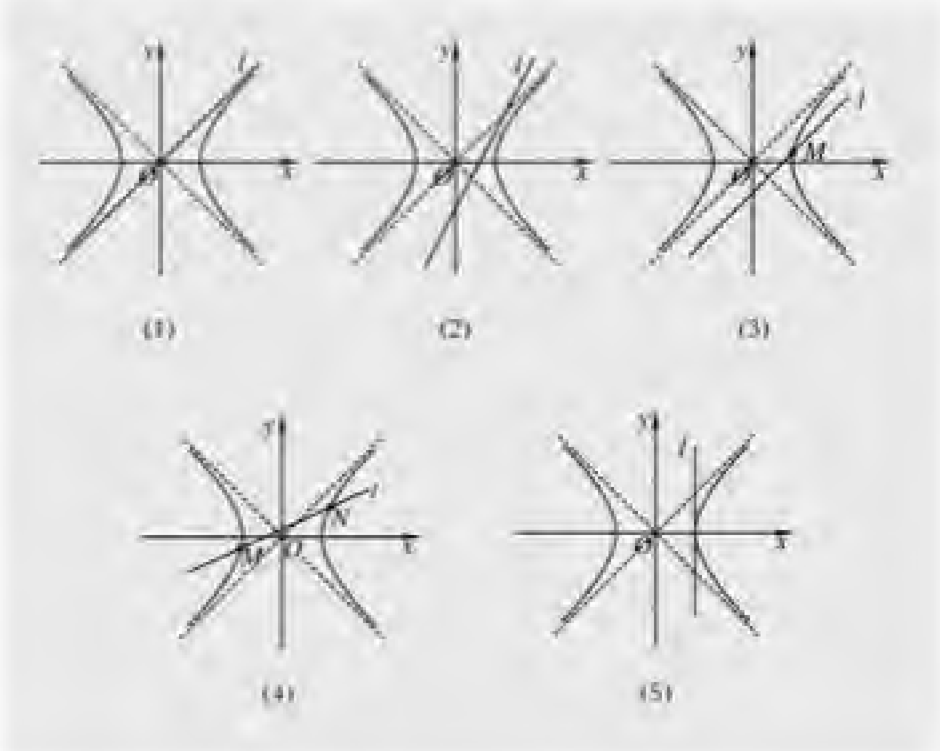


图 2－14 双曲线与直线的 5 种位置关系

练 习

1. 指出下列双曲线的实轴长、虚半轴长、焦点坐标、渐近线方程，并画出简图.

(1) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$；　　(2) $\frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{16}=1$；

(3) $x^2-y^2=1$；　　(4) $4x^2-9y^2=1$.

2. 求适合下列条件的双曲线的标准方程.

(1) $a=4$，$b=3$；

(2) $a=2\sqrt{5}$，经过点 $A(-5,2)$.

5. 就 k 讨论直线 $y=kx+1$ 与双曲线 $x^2-y^2=1$ 交点的个数.

习题 2

学而时习之

1. 求适合下列条件的双曲线的标准方程.

(1) 焦点在 x 轴上，$c=6$，且过点 $A(-5,2)$；

(2) $a=12$，$b=5$；

(3) 经过两点 $A(-7,-6\sqrt{2})$，$B(\sqrt{7},-3)$.

2. 已知 $M(-c,0)$，$N(c,0)$，若 $|PM|-|PN|=c(c>0)$，则动点 P 的轨迹是（　　）

(A) 双曲线的左支　　　　(B) 双曲线的右支

(C) 以 N 为端点的射线　　　　(D) 线段 MN

3. 求适合下列条件的双曲线的标准方程：

(1) 焦点在 y 轴上，焦距为 8，渐近线斜率为 $\pm\frac{1}{3}$；

(2) 经过点 $(3,-2)$，且一条渐近线的倾斜角为 $\frac{\pi}{6}$；

(3) 焦点在 x 轴上，过点 $P(4\sqrt{2},-3)$，且 $Q(0,5)$ 与两焦点连线互相垂直；

(4) 以 $2x\pm3y=0$ 为渐近线，且经过点 $(1,2)$；

(5) 以椭圆 $\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{16}=1$ 的长轴的端点为焦点，且过椭圆焦点.

4. 过 $P(0,1)$ 的直线 l 与双曲线 $x^2-\frac{y^2}{3}=1$ 有且仅有一个公共点，求直线 l 的方程.

温故而知新

5. 过双曲线的焦点 F_1 的直线与该双曲线的同一支相交于 A，B 两点，且

$|AB|=m$，另一焦点为 F_1，则$\triangle ABF_1$的周长为（　　）

(A) $4a$　　(B) $4a-m$

(C) $4a+2m$　　(D) $4a-2m$

6. 若双曲线$\frac{x^2}{a}-\frac{y^2}{b}=1$（$a>0$，$b>0$）和椭圆$\frac{x^2}{m}+\frac{y^2}{n}=1$（$m>n>0$）有共同的焦点 F_1，F_2，P 是两条曲线的一个交点，则 $|PF_1|\cdot|PF_2|=$（　　）

(A) m^2-a^2　　(B) $\sqrt{m}-\sqrt{a}$

(C) $\frac{1}{2}(m-a)$　　(D) $m-a$

7. 已知双曲线$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$的两个焦点分别为 F_1，F_2，点 P 在双曲线上，且 $PF_1\perp PF_2$，求点 P 至 x 轴的距离.

8. 过点 $A(6，1)$ 作直线与双曲线 $x^2-4y^2=16$ 相交于两点 B，C，且 A 为线段 BC 中点，求这条直线的方程.

2.3 抛物线

2.3.1 抛物线的定义与标准方程

初中学过的二次函数的图象称为抛物线. 在重力作用下的平抛物体或斜抛物体（比如运动场上推出的铅球、投出的篮球、水池里喷出的水柱），它们运动的轨道都是抛物线的一部分.

怎样通过几何性质来刻画抛物线？

实验　任给一个定点 F 和一条直线 l，设计适当的方法或装置画出到 F 和 l 距离相等的点的轨迹并观察轨迹的形状.

方法1　描点作图：如图 2－15 所示，作 FD 与 l 垂直相交于 D，作 FD 的中点 O，则 O 在所说轨迹上. 在 l 上任取一点 E，过 E 作 l 的垂线，与线段 FE 的垂直平分线交于一点 P，则 P 在所说轨迹上. 在 l 上 D 的两侧各取一些点作为 E，按上述方法作出轨迹上一系列点 P，依次连接成光滑曲线，就得到了轨迹的大致形状.

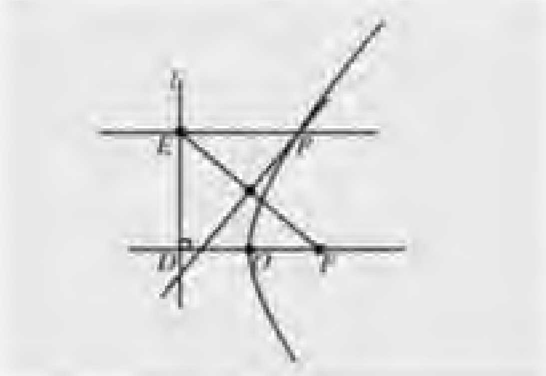


图 2－15

方法 2 设计装置如图 2－16：将一根直尺沿着直线 l 固定不动．在一个三角板的一条直角边上取定点 A，设三角板的直角顶点为 C．取一条细线使它的长度正好等于 AC 的长度．将这条细线的一端固定在三角板上的点 A，另一端用大头针固定在点 F．将三角板的另一条直角边紧靠直尺的边缘，与 l 重合．用铅笔靠着细线将它绷紧，使铅笔贴在三角板上 AC 之间．让三角板沿着直尺滑动，则铅笔尖所在的点 P 就画出所说的轨迹的一段．

图 2－16

观察画出的轨迹的形状，发现它们好像是初中学过的二次函数的图象——抛物线．为了验证所得的轨迹形状是否与二次函数的图象相同，我们在适当的直角坐标系下列出轨迹的方程．

例 1 已知定点 F，定直线 l 且 $F\notin l$．动点 P 到 F 与 l 的距离相等．在适当的直角坐标系中求动点 $P(x,y)$ 的轨迹的方程．

解 如图 2－17，从 F 作 l 的垂线交 l 于 D．设 $p=|FD|$，取 FD 的中点 O．以 O 为原点，以 $\overrightarrow{OF}$ 为 x 轴的正方向，建立直角坐标系．

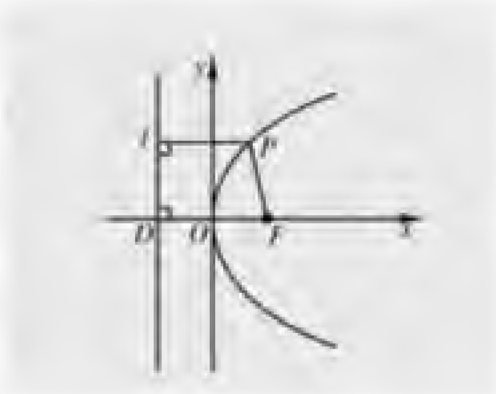


图 2-17

点 $P(x,y)$ 到 $F\left(\frac{p}{2},0\right)$ 的距离 $d_1=\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}$.

$P(x,y)$ 到 l 的距离 $d_2=\left|x+\frac{p}{2}\right|$.

$$\begin{aligned} d_1=d_2 &\Leftrightarrow \sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}=\left|x+\frac{p}{2}\right| \\ &\Leftrightarrow \left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 \\ &\Leftrightarrow x^2-px+\frac{p^2}{4}+y^2=x^2+px+\frac{p^2}{4} \\ &\Leftrightarrow y^2=2px. \end{aligned}$$

因此，所求轨迹的方程为 $y^2=2px$.

如果以 O 为原点、$\overrightarrow{OF}$ 的方向为 y 轴正方向建立直角坐标系，则可得轨迹方程为 $x^2=2py$，即 $y=\frac{1}{2p}x^2$，这是以 x 为自变量、y 为因变量的二次函数，在初中数学中就知道它的图象是抛物线. 而 $y^2=2px$ 的图象是将“开口向上”的抛物线 $y=\frac{1}{2p}x^2$ 绕顶点沿顺时针方向旋转 90° 得到的.

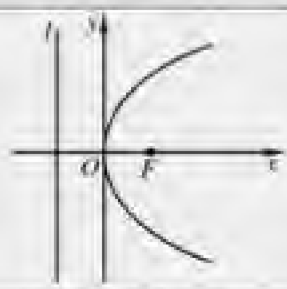
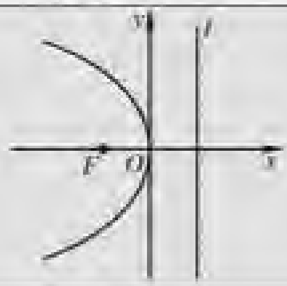
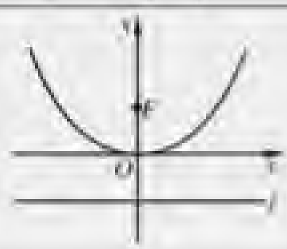
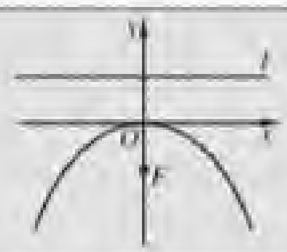
到一定点 F 和定直线 l（$F\notin l$）距离相等的点的轨迹叫作抛物线(parabola)，定点 F 叫作抛物线的焦点，定直线 l 叫作抛物线的准线(directrix).

对任一 $p>0$，焦点为 $F\left(\frac{p}{2},0\right)$，准线为 $x=-\frac{p}{2}$ 的抛物线方程为

$$y^2=2px$$

这称为抛物线的标准方程.

如果按其他方式建立坐标系，就得出抛物线的其他形式的方程. 如果建立坐标系满足条件：原点是焦点到准线的垂线段的中点，一条坐标轴指向焦点从而垂直于准线，所得的抛物线的方程就称为标准方程. 这样的标准方程及其图象有如下四种情况，其中 $p>0$.

图　形	焦点坐标	准线方程	标准方程
	$\left(\frac{p}{2},0\right)$	$x=-\frac{p}{2}$	$y^2=2px$
	$\left(-\frac{p}{2},0\right)$	$x=\frac{p}{2}$	$y^2=-2px$
	$\left(0,\frac{p}{2}\right)$	$y=-\frac{p}{2}$	$x^2=2py$
	$\left(0,-\frac{p}{2}\right)$	$y=\frac{p}{2}$	$x^2=-2py$

例 2　求如下抛物线的焦点坐标和准线方程：

(1) $y^2=4x$；　　(2) $y=ax^2$，其中 $a>0$.

解　(1) 方程具有形式 $y^2=2px$，其中 $2p=4$，从而 $p=2$. 因

此焦点坐标为$\left(\frac{p}{2},\ 0\right)=(1,\ 0)$，准线方程为$x=-\frac{p}{2}$，即$x=-1$.

(2) 方程可化为$x^2=\frac{1}{a}y$，具有标准形式$x^2=2py$，其中$p=\frac{1}{2a}$.
因此焦点坐标为$\left(0,\frac{p}{2}\right)=\left(0,\frac{1}{4a}\right)$，准线方程为$y=-\frac{p}{2}$，即$y=-\frac{1}{4a}$.

练　习

1. 求下列各抛物线的焦点坐标和准线方程，并画出简图.

　(1) $y^2=16x$；　(2) $y=16x^2$；　(3) $y^2=-\frac{1}{4}x$；　(4) $y=-\frac{1}{4}x^2$.

2. 求适合下列条件的抛物线的标准方程.

　(1) 焦点为$F(-2,\ 0)$；　(2) 准线方程$y=-2$.

2.3.2 抛物线的简单几何性质

实验　选取$p>0$的值作出抛物线$y^2=2px$的图象，如图 2－18 所示. 观察图象研究它的几何性质. 建议研究如下性质：

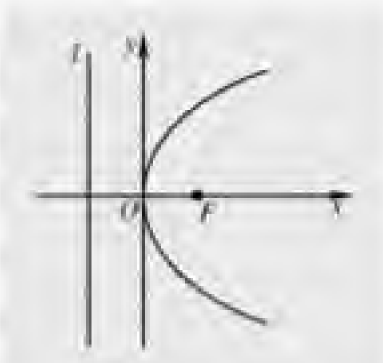


图 2－18

1. 范围：抛物线伸展的范围是有限还是无限？在上、下、左、右四个方向上都有限还是都无限？如果在某个方向上有限，找出在这个方向上最远的点.

2. 对称性：是不是中心对称图形？如果是，找出对称中心. 是不是轴对称图形？如果是，找出对称轴.

3. 你所能想到的其他性质.

下面我们通过抛物线的方程研究它的几何性质.

一、范 围

在方程 $y^2=2px$ 中将 x 当作已知数，求出 $y=\pm\sqrt{2px}$. 由于 $p>0$，因此 x 允许取值的范围为 $x\geqslant0$. 这就是说，抛物线在 y 轴的右侧，向右无限延伸. 当 x 的值无限增大时，$|y|=\sqrt{2px}$ 也无限增大，图象向上和向下都无限延伸.

在 $y^2=2px$ 中将 y 当作已知数解出 $x=\frac{1}{2p}y^2$，可以看出 y 的允许取值范围为全体实数，这也说明抛物线向上和向下无限延伸.

x 取最小值 0 时，$y=0$. 图象最左边的点是原点 $(0,0)$.

二、对称性

点 (x,y) 关于 x 轴的对称点是 $(x,-y)$. 在方程 $y^2=2px$ 中将 y 换成 $-y$，得到的 $(-y)^2=2px$ 与原方程 $y^2=2px$ 相同. 这说明：这条抛物线关于 x 轴对称，x 轴是它的对称轴.

每一条抛物线有唯一一条对称轴，称为抛物线的轴（axis）.

三、顶 点

抛物线和它的对称轴的交点称为抛物线的顶点.

比如，抛物线 $y^2=2px$ 的顶点是原点 $(0,0)$.

例 1 一条抛物线关于 x 轴对称，顶点在原点，并且经过点 $(1,2)$. 求抛物线方程.

解 这条抛物线的标准方程具有形式 $y^2=2px$. 将已知点 $(1,2)$ 的坐标 $x=1$，$y=2$ 代入方程得 $2^2=2p\times1$，因此 $p=2$. 所求方程为 $y^2=4x$.

例 2 已知抛物线和它的对称轴. 试设计几何作图法作出抛物线的焦点和准线.

解 以抛物线的顶点为原点、顶点到焦点的方向为 x 轴的正方向建立直角坐标系，则抛物线具有标准方程 $y^2=2px$，焦点坐标为 $\left(\frac{p}{2},0\right)$，准线方程为 $x=-\frac{p}{2}$.

过焦点作平行于 y 轴的直线与抛物线相交，得到两个交点 $P_1\left(\frac{p}{2},y_1\right)$，$P_2\left(\frac{p}{2},-y_1\right)$，其中 $y_1>0$. 由 $y_1^2=2p\cdot\frac{p}{2}$ 得 $y_1=p$.

因此，$P_1\left(\frac{p}{2}, p\right)$在直线 $y=2x$ 上，是直线 $y=2x$ 与抛物线的交点.

由此得到作抛物线的焦点和准线的作图法的步骤如下(见图2-19)：

从几何意义看，作几何作图问题用代数语言来描述，建立模型加以解决，再将代数求解的结果通过几何作图来实现.

(1) 抛物线的对称轴与抛物线相交得到顶点 O；

(2) 在对称轴上任取一个与 O 不重合的点 A 使$\overrightarrow{OA}$指向抛物线的开口方向. 从 A 作 $AB\perp OA$ 且 $|AB|=2|OA|$，作射线 OB 与抛物线相交于点 P；

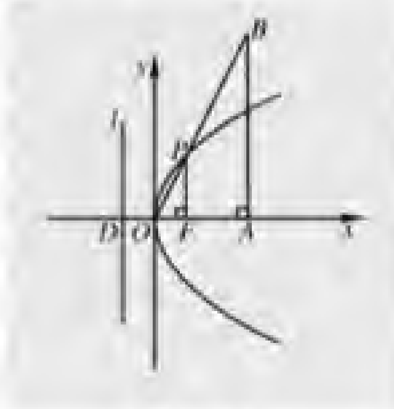


图 2-19

(3) 过 P 作 $PF\perp OA$，与射线 OA 相交于 F. 则 F 为抛物线的焦点.

(4) 延长 FO 到 D 使 $OD=FO$. 过 D 作 $l\perp OD$，则 l 为准线：

例 3 抛物形拱桥如图 2-20 所示. 当拱顶离水面 2.5 m 时，水面宽 4.5 m. 如果水面上升 0.5 m，水面宽多少（精确到 0.01 m)?

解 以拱桥顶为原点，以向上的方向为 y 轴正方向，1 m 为单位长，建立直角坐标系. 则现在水面与拱桥在第三象限内的交点 A_1 的坐标(x_1, y_1)为$(-2.25, -2.5)$.

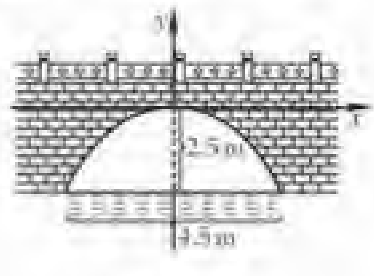


图 2-20

抛物线方程具有标准形式 $x^2=2py$. 由 $x_1^2=2py_1$ 得

$$2p=\frac{x_1^2}{y_1}=\frac{2.25^2}{-2.5}=-2.025.$$

水面上升 0.5 m 之后，水面与拱桥在第三象限内的交点 $A_2(x_2, y_2)$的纵坐标为 $y_2=-2$. 代入抛物线方程得

$$x_2=-\sqrt{2py_2}=-\sqrt{2.025\times 2}\approx -2.01.$$

故水面宽为 $2.01\times 2=4.02$ (m).

例 4 讨论直线与抛物线的位置关系.

解 建立直角坐标系使抛物线具有标准方程 $x^2=2py$，$p>0$. 设

直线 l 的方程为 $y=kx+b$ 或 $x=a$．则抛物线与直线的公共点坐标是直线方程与抛物线方程的公共解．

先讨论方程组

$$\begin{cases} y=kx+b, & ① \\ x^2=2py & ② \end{cases}$$

的解的各种可能的情况．

将①代入②，得 $x^2=2p(kx+b)$．

整理得 $$x^2-2pkx-2pb=0.\qquad ③$$

这是关于 x 的一元二次方程，判别式

$$\Delta=(-2pk)^2-4(-2pb)=4p(pk^2+2b).$$

当 $\Delta<0$ 即 $b<-\frac{pk^2}{2}$ 时，方程③无实数解，方程组无实数解．此时直线与抛物线相离，无公共点．

当 $\Delta>0$ 即 $b>-\frac{pk^2}{2}$ 时，方程③有两个实数解，方程组有两组实数解．此时直线与抛物线相交，有两个公共点．

当 $\Delta=0$ 即 $b=-\frac{pk^2}{2}$ 时，方程③有一个实数解，方程组有一组实数解．此时直线与抛物线有一个公共点．观察图象可知，直线与抛物线在这个公共点的切线的方向一致，此时称直线与抛物线在这个公共点相切，这个公共点称为它们的切点．

保持 k 不变，让 b 从大于 $-\frac{pk^2}{2}$ 的值逐渐减少到 $-\frac{pk^2}{2}$，则 Δ 由大于 0 逐渐减少到 0，方程③的两组解逐渐变化成一组解，直线与抛物线的两个交点逐渐变化到重合，变成一个公共点．因此直线与抛物线在这个公共点相切．

再来讨论方程组

$$\begin{cases} x=a, & ①' \\ x^2=2py & ② \end{cases}$$

的解的情况．

将①′代入②，得

$$a^2=2py.\qquad ③'$$

这是关于 y 的一元一次方程，在任何情况下都有唯一解 $y=\frac{a^2}{2p}$，直线与抛物线有唯一的交点 $\left(a,\ \frac{a^2}{2p}\right)$．

虽然此时直线与抛物线只有一个公共点，但从图象观察可知，直线与抛物线在这一点的切线方向并不相同，它们在这一点相交而不相切．

综上所述，直线与抛物线的位置关系有如下四种可能性：

相离（无公共点）；相交于一点（直线平行于抛物线的轴）；相交于两点；相切于一点.

多知道一点

圆锥截线

设直线 l，m 相交于点 S，夹角为锐角 α. 其中一条直线 m 绕另一条直线 l 旋转一周形成圆锥面. 则 S 是圆锥面的顶点，l 是圆锥面的轴，圆锥面上过 S 的任意一条直线都是圆锥面的母线.

用一个不经过 S 点的平面 β 去截这个圆锥面，随着平面与轴所成角 θ 的不同，截线的形状也随之变化.

如图 2-21 所示.

1. $\theta=\frac{\pi}{2}$，平面与轴垂直，截线是圆.

2. $\alpha<\theta<\frac{\pi}{2}$，截线是椭圆.

3. $\theta=\alpha$，截线是抛物线.

4. $0<\theta<\alpha$，截线是双曲线.

圆，椭圆、抛物线、双曲线都可以由平面截圆锥面得到，统称为圆锥曲线（conic section）.

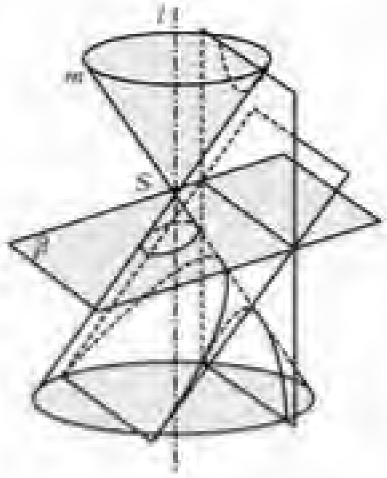


图 2-21

例 如图 2-22，用一个平面去截圆锥，试说明为什么截线的形状是椭圆.

解 在圆锥内截面平面两侧各作一个球同时与圆锥面和截面相切，两球与截面分别相切于点 E，F，与圆锥面各相切于一个圆.

对截线上任意一个点 A，按如图所示过 A 作圆锥的母线与两圆分别相交于 B，C. 由于 AB 与 AF 都是球外一点到同一球面所作的

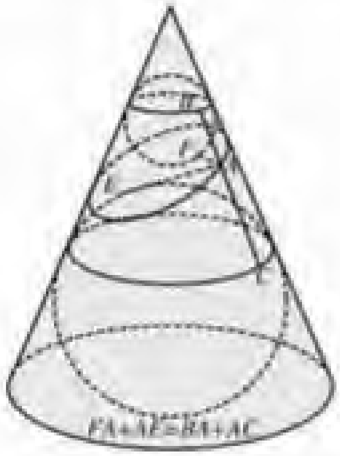


图 2-22

切线，这两条切线段的长度相等：$|AB|=|AF|$. 同理有 $|AE|=|AC|$. 于是 $|AE|+|AF|=|AC|+|AB|=|BC|$. 当 A 在截线上变化时 $|BC|$ 不变. 这就说明了截线上的动点 A 到两点 E，F 的距离之和等于定值. 可见截线是以 E，F 为焦点的椭圆.

假如在上例中的平面与圆锥的轴垂直，则两个焦点 E，F 重合，截线椭圆变成以 E 为圆心的圆.

在其他情况下可以观察到截线的形状是抛物线或双曲线. 但其中的道理就不能在这里讲了，有兴趣的同学可以参见本套教材选修系列 4-1《几何证明选讲》.

练 习

1. 指出下列抛物线的顶点坐标、对称轴、焦点坐标、准线方程.

   (1) $y^2=8x$；　(2) $x^2=32y$；　(3) $y=-24x^2$；　(4) $x=-\frac{1}{16}y^2$.

2. 过点 $M(2,4)$ 作直线 l，与抛物线 $y^2=8x$ 只有一个公共点. 这样的直线有________条.

3. 过抛物线 $y^2=4x$ 的焦点作直线交抛物线于 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$ 两点，若 $x_1+x_2=6$，则 $|AB|=$________.

习题 3

学而时习之

1. 指出下列各抛物线的焦点坐标和准线方程，并画出简图．

   (1) $y^2=x$；　(2) $x^2=-y$；　(3) $y^2=ax$ $(a\neq 0)$．

2. 抛物线 $y^2=ax$ 的准线方程为 $x=-1$，则 $a=$（　）

   (A) -2　(B) -4　(C) 2　(D) 4

3. 抛物线 $y^2=4x$ 上的点到其焦点距离最近的点的坐标为（　）

   (A) $(0,0)$　(B) $(1,1)$　(C) $(1,0)$　(D) $(-1,0)$

4. 抛物线 $y^2=2px$ 与直线 $ax+y-4=0$ 交于两点 A，B，其中点 A 的坐标为 $(1,2)$，设抛物线的焦点为 F，求 $|FA|+|FB|$ 的值．

温故而知新

5. 过抛物线 $y^2=4x$ 焦点的直线交抛物线于 A，B 两点，已知 $|AB|=8$，O 为坐标原点，$\triangle OAB$ 的重心的横坐标为_______，直线 AB 的倾斜角为_______．

6. 设抛物线 $y^2=4x$ 上一点 P 到直线 $x+2=0$ 的距离为 5，则点 P 到抛物线焦点 F 的距离为_______．

7. 求过定点 $P(0,1)$ 且与抛物线 $y^2=2x$ 只有一个公共点的直线的方程．

8. M 为抛物线 $y^2=4x$ 上一动点，F 是焦点，$P(3,1)$ 是定点．求 $|MP|+|MF|$ 最小值．

2.4　圆锥曲线的应用

圆、椭圆、抛物线、双曲线统称为圆锥曲线．它们都可以由平面去截圆锥面得到．

圆锥曲线在自然界广泛存在，在生活、生产和科学技术中有广泛的应用．下面是一些初步的例子．

一、斜抛物体的轨迹

运动场上推出的铅球、投掷的手榴弹、投出的篮球，都是斜抛物体，它们的运动轨迹近似地都是抛物线．喷水池里喷出的水柱中的每一部分水也可以看作斜抛物体，水柱的形状也接近于抛物线．

例 1 将物体向斜上方抛出，抛出时的速度大小为 v_0，方向与水平方向的夹角为 α．假如只考虑重力，不计空气阻力，求证斜抛物体的运动轨道是抛物线的一部分．求出这条抛物线的焦点与准线之间的距离．

这是数学建模：借助于适当的数学模型来研究物体的运动．

解 斜抛物体的运动可以分解为水平方向的运动和竖直方向的运动．水平方向没有受力，运动为匀速运动，速度大小为 $v_0\cos\alpha$．设轨道最高点为 O，则物体在点 O 只有水平方向的速度 $v_0\cos\alpha$ 而没有竖直方向的速度．在运动轨道所在的平面内建立直角坐标系，以 1 m 为单位长度，以 O 为原点，使 x 轴在沿水平且其方向指向物体在点 O 前进的方向，y 轴的正方向竖直向上，如图 2－23 所示．

不从物体抛出时开始计算时间和坐标，而以物体到达最高点时的时刻为 0，位置为原点，这样可以简化运算，得出的方程也最简单．想想看，物体从抛出点到最高点这一段的时间 t 是负的，你习惯这种表示方式吗？应当习惯．

物体在 x 轴方向上的运动是匀速运动，速度为 $v_0\cos\alpha$．以物体在点 O 的时刻为 0，则经过 t 秒之后的 x 坐标为 $x=(v_0\cos\alpha)t$．（允许 t 取负值，表示物体到达最高点 O 之前的情况．）

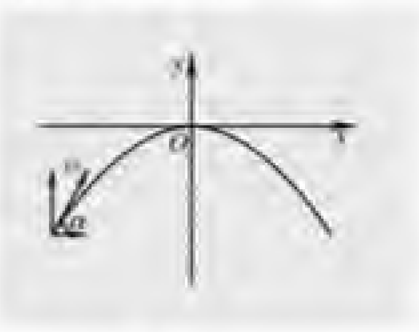


图 2－23

物体在 y 轴方向上有重力加速度 $-g$．到达最高点 O 时（也就是 $t=0$ 时）的速度为 0．时刻 t 时的 y 坐标为 $y=-\frac{1}{2}gt^2$．

加速度大小为 g（约 9.8 m/s²），$-g$ 表示方向向下．当 t 为负时算出的 y 也就是物体到达最高点之前的 y 坐标．

因此，在时刻 t 时物体的位置坐标 $(x,y)=\left(v_0t\cos\alpha,-\frac{1}{2}gt^2\right)$．

由 $x=v_0t\cos\alpha$ 解出 $t=\frac{x}{v_0\cos\alpha}$，代入 y 坐标表达式得

为什么命名为"抛物线"？就是因为它是"抛出的物体所走的曲线".

$$y=-\frac{1}{2}g\left(\frac{x}{v_0\cos\alpha}\right)^2.$$

即

$$x^2=-\frac{2v_0^2\cos^2\alpha}{g}y.$$

具有抛物线的标准方程 $x^2=-2py$ 的形式，其中 $p=\frac{v_0^2\cos^2\alpha}{g}$.

这证明了斜抛物体的运动轨迹是抛物线，这个抛物线的焦点与准线之间的距离 $p=\frac{v_0^2\cos^2\alpha}{g}$.

二、天体运动的轨道

天文学家开普勒根据前人观测行星运动的大量数据总结出行星运动的三大定律．其中第一定律是：

太阳系中的行星运动的轨道是椭圆，太阳位于椭圆的一个焦点．

牛顿根据开普勒定律得出了万有引力定律．这个定律指出：宇宙间任何两个物体之间都有吸引力，称为万有引力．万有引力的大小与两个物体的质量的乘积成正比，与它们之间的距离的平方成反比．

按照万有引力定律可以推出，绕太阳运动的天体，它的运动轨道是圆锥曲线．当天体运动的动能小于某一个值时，运动轨道是椭圆；等于这个值时，轨道是抛物线；大于这个值时，轨道是双曲线的一支．当轨道是抛物线或双曲线时，天体就不是太阳系中的行星，它将一去不复返．

例 2 某颗彗星的轨道是一个椭圆，太阳位于椭圆的一个焦点．如图 2－24 所示，彗星离太阳的最近距离是 1.486 天文单位，最远距离是 5.563 天文单位（1 天文单位是太阳与地球之间的平均距离，约为 1.50×10^8 km，是度量太空中的距离的一种单位）．求轨道椭圆的长半轴和短半轴之长各是多少个天文单位．

解 如图 2－24，设椭圆的焦点为 F_1，F_2，焦距为 $2c$，太阳位于焦点 F_2．

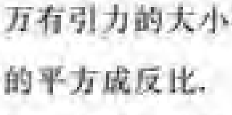


图 2－24

彗星位置 P 到两焦点的距离之和 $|PF_1|+$

$|PF_2|$等于一个固定值$2a$. 要使$|PF_1|$最大，必须距离之差$|PF_1|-|PF_2|$最大。但$|PF_1|-|PF_2|\leqslant|F_1F_2|=2c$，仅当$F_1$，$F_2$，$P$成一条直线且$F_2$在$F_1$和$P$之间时，$|PF_1|-|PF_2|$达到最大值$2c$. $|PF_1|$达到最大值$\frac{2a+2c}{2}=a+c$. 而仅当$|PF_1|$达到最大值$a+c$时，$|PF_2|$达到最小值$a-c$. 可见

$$\begin{cases}a+c=5.563,\\a-c=1.486.\end{cases}$$

解之得 $a=\frac{5.563+1.486}{2}=3.524\ 5$，$c=5.563-3.524\ 5=2.038\ 5$.

因此 $b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{3.524\ 5^2-2.038\ 5^2}\approx2.875\ 2$.

椭圆的长半轴长3.524 5天文单位，短半轴长2.875 2天文单位.

三、光学性质及其应用

探照灯的反射面由抛物线的一部分绕轴旋转而成，光源安置在抛物线的焦点处，这样可以使发出的光线经过镜面的反射之后平行射出.

电影放映机需要将尽可能强的光线照在电影胶片上. 放映机的聚光灯的反射镜由椭圆的一部分绕长轴旋转而成，光源安置在椭圆的一个焦点处，正在放映的电影胶片位于另一个焦点. 光源发出的光线经过镜面的反射之后全部聚于另一个焦点，以最强的光线照亮电影胶片.

如果反射面由双曲线的一支绕轴旋转而成，光源安置于焦点，发出的光线经反射之后发散射出，就好像是从反射镜后面另一个焦点的位置射出的那样.

例3 探照灯反射镜由抛物线的一部分绕轴旋转而成，光源位于抛物线的焦点处，这样可以保证发出的光线经过反射之后平行射出，如图2－25. 已知灯口圆的直径为60 cm，灯的深度为40 cm.

(1) 将反射镜的旋转轴与镜面的交点称为反射镜的顶点. 光源应安置在旋转轴上与顶点相距多远的地方？

(2) 为了使反射的光更亮，增大反射镜的面积，将灯口圆的直径增大到66 cm，并且保持光源与顶点的距离不变，求灯的深度.

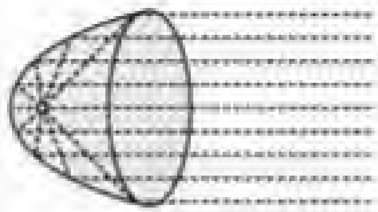


图 2－25

解 （1）在反射镜的轴截面上建立直角坐标系，以抛物线的顶点（也是反射镜的顶点）为原点，以旋转轴为 x 轴并且使抛物线开口方向是 x 轴的正方向，以 1 cm为单位长，如图 2－26 所示．则抛物线的方程具有标准形式 $y^2=2px$．灯口圆与轴截面在一象限内的交点 A 的坐标为 (40,30)．代入抛物线方程得

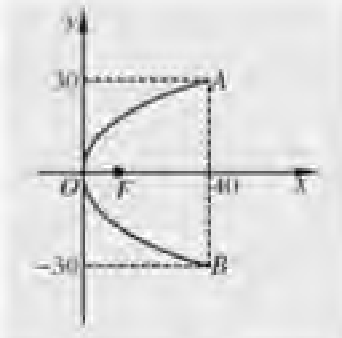


图 2－26

$$30^2=2p\times40.$$

解之得 $p=\frac{45}{4}$．焦点坐标为 $\left(\frac{p}{2},0\right)=\left(\frac{45}{8},0\right)$，故光源所在位置与顶点的距离为 $\frac{45}{8}\approx5.625$ (cm)．

光源应安装在旋转轴上离顶点 5.625 cm 处．

（2）坐标系仍如（1）．焦点与顶点的距离 $\frac{p}{2}$ 不变，因此抛物线方程 $y^2=2px$ 不变，为 $y^2=\frac{45}{2}x$．灯口圆与轴截面在一象限的交点的纵坐标变为 $\frac{66}{2}=33$ (cm)．将 $y=33$ 代入抛物线方程求横坐标 x，得

$$33^2=\frac{45}{2}x,\ x=\frac{33^2\times2}{45}=48.4\ \text{(cm)}.$$

灯的深度为 48.4 cm．

练　习

1．双曲线形自然通风塔的外形是双曲线的一部分绕其虚轴旋转所成的曲面，如图

2-27所示，它的最小半径为12 m，上口半径为15 m，下口半径为25 m，高为55 m. 选择适当的坐标系求此双曲线的方程.

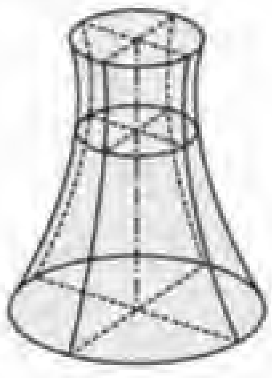


图 2-27

3. 某隧道横截面由抛物线及矩形的三边组成，尺寸如图2-28所示. 某大车空车时能通过隧道，现载一集装箱，箱宽3 m，车与箱共高4.5 m，试判断此车能否通过此隧道？说明理由.

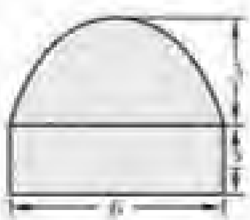


图 2-28

习题 4

学而时习之

1. 某农场为节水推行喷灌技术，喷头装在管柱 OA 的顶端 A 处，喷出的水流在各个方向上呈抛物线状，如图2-29所示. 现要求水流最高点 B 离地面5 m，点 B 到管柱 OA 所在直线的距离为4 m，且水流落在地面上以 O 为圆心，以9 m为半径的圆上，求管柱 OA 的高度.

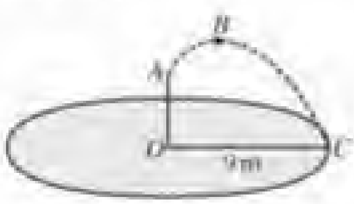


图 2-29

2. 在某平原上有一块低洼地区，一条运河从最低处 A 通往大海，最低点 A 处海拔高度为1 m，如图2-30所示. 该地区沿海平面的垂线 AB 的任意一个剖面与地

面的交线均为相同的双曲线，B 为双曲线的中心．由于温室效应，海平面逐年上升，自 2004 年起，海平面平均每年上升 4 cm，专家预测，到 2054 年，该地区 10 km² 以内居住者必须迁移．请你预测，到 3004 年，该地区有多大范围内居住者必须迁移？

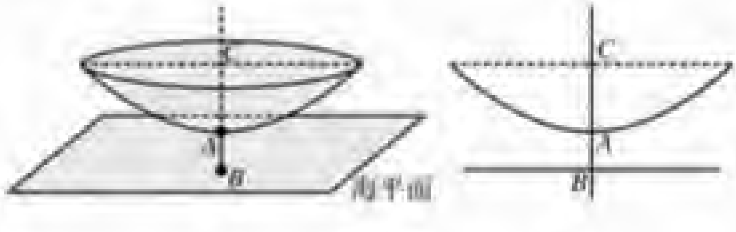


图 2-39

温故而知新

3. 某大桥在涨水时有最大跨度的中央桥孔．它的跨度为 20 m，拱顶呈抛物线形，拱顶距水面 6 m，桥墩高出水面 4 m．现有一货轮欲通过此孔，该货轮水下宽度不超过 18 m．目前吃水线上部分中央船体高 5 m，宽 16 m．若不考虑水下深度，该货轮在现状况下能否通过桥孔，请说明理由．
4. 有一条光线沿直线 $y=4$ 射到抛物线 $y^2=4x$ 上的一点 P，经抛物线反射后，反射光线与抛物线的另一个交点是 Q，O 是抛物线的顶点，F 是抛物线的焦点，求弦 PQ 的斜率和 $\triangle OPF$ 的面积 S．

数学实验

圆锥曲线的光学性质

实验1 圆锥曲线的光学性质.

实验目的 将圆锥曲线绕轴旋转得到的曲面作为反射镜面，研究从焦点发出的光线经过反射之后发出的光束的性质.

实验内容和方法 任选 $p>0$，画出抛物线 $y^2=2px$，标出它的焦点 $F\left(\frac{p}{2},0\right)$ 的位置. 它的对称轴是 x 轴.

从焦点 F 向抛物线上任意一点 P 作入射光线 FP. 根据光的反射定律按照如下几何作图法作出反射光线 PM（如图 2-31）.

过点 P 作抛物线的切线 t. 过 P 作 $PN\perp t$，则 PN 是抛物线在点 P 的法线. 从 P 作射线 PM 与入射光线 FP 分别位于法线 PN 的两侧，且 $\angle FPN=\angle NPM$，则 PM 是反射光线.

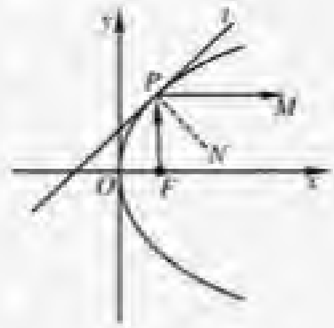


图 2-31

从 F 向抛物线上不同的点作入射光线和反射光线. 观察所有的反射光线的相互位置关系. 你发现什么规律?

试对椭圆和双曲线做同样的实验. 你发现什么规律?

实验2 探照灯的反射镜面.

实验目的 寻找一种平面曲线，将它绕某条轴旋转所成的曲面作为探照灯的反射镜面，可以将轴上适当的位置 F 安置的光源发出的光线经反射后平行射出.

实验内容和方法 在平面上建立直角坐标系，以 x 轴为镜面的旋转轴，原点 O 为所求曲线的出发点. 取 $h>0$，在 x 轴上取 $F(h,0)$ 作为光源的位置.

我们的目的是寻找从 O 出发，处于第一象限内的一条曲线，使得从 F 点发出的光线经过曲线反射之后沿 x 轴的正方向射出.

如图 2－32，首先让光线从 F 射到点 O，经反射之后沿 x 轴的正半轴 Ox 射出．为此，曲线在点 O 的法线方向应当沿 x 轴，切线方向应当垂直于法线方向，沿 y 轴向上．取定一个很小的长度 d 作为曲线每一步前进的距离，称为步长．从 O 出发沿 y 轴正方向画一条长度等于 d 的有向线段 OP_1，作为镜面曲线的第一段.

连接 FP_1 作为入射光线，过 P_1 作射线 P_1M_1 平行于 x 轴向右作为反射光线．作 $\angle FP_1M_1$ 的角平分线 P_1N_1．根据光的反射定律，P_1N_1 应是镜面曲线的法线方向．从 P_1 出发向右上方作长度等于步长 d 的有向线段 $P_1P_2 \perp P_1N$，作为镜面曲线的第二段.

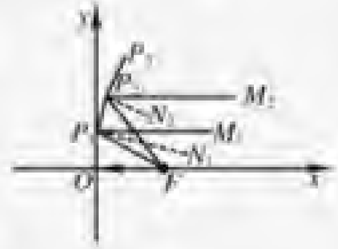


图 2－32

照此方法可以一段一段地作出折线 $OP_1P_2P_3\cdots$ 作为镜面曲线的近似形状．假如已经前进了 k 步作出了折线的 $OP_1P_2P_3\cdots P_k$，则下一步作图应当如下进行：

连接 FP_k，作 P_kM_k 平行于 x 轴向右，作 $\angle FP_kM_k$ 的角平分线 P_kN_k 作为镜面曲线的法线，从 P_k 出发向右上方作长度等于 d 的有向线段 $P_kP_{k+1} \perp P_kN_k$，作为镜面曲线的下一段.

照此方法进行下去，画出的折线越来越长，直到经过若干步之后你认为长度已经足够，就停止作图.

可以先用手工作图，观察所得到的折线 $OP_1P_2P_3\cdots P_n$ 的大致形状，猜测它接近于什么曲线.

但是，手工作图时 d 不可能取得很小，n 不能很大，这样作出来的折线，离准确的镜面曲线误差太大．因此，最好利用计算机作图.

预先取很小的 $d>0$ 作为步长．（取怎样的 d 恰当、需要走多少步才停止，需要通过实验结果来检验.）利用解析几何知识依次算出 P_1，P_2，P_3，…，P_n 的坐标，然后让计算机将这些点依次连

接成光滑曲线，作为镜面曲线的近似形状.

我们做出的实验结果如图 2－33. 通过观察，猜测它好像是什么曲线.

曲线好像是抛物线.

为了验证它是否抛物线，可以作一条抛物线与它比较. 为此，只需以 O 为顶点、x 轴为对称轴，作一条抛物线 $y^2=2px$ 在第一象限内的部分，并适当选择 $p>0$ 使这条抛物线经过实验曲线的终点 P_n. 观察所作的抛物线与实验得到的镜面曲线是否吻合.

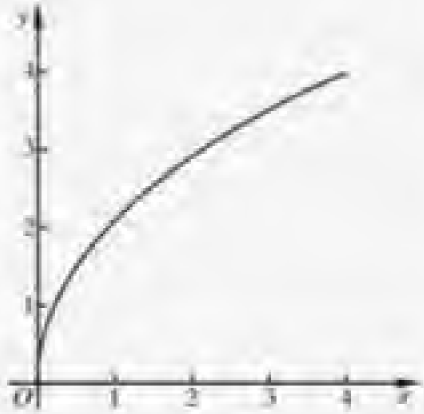


图 2－33

如果有兴趣，你可以将实验 2 中对镜面曲线的要求按如下方案之一修改：

(1) 在 x 轴的正半轴上取两点 $F_1(h_1,0)$, $F_2(h_2,0)$ 使 $0<h_1<h_2$. 要求从 F_1 发出的光线经镜面反射之后会聚到 F_2.

(2) 在 x 轴的正半轴和负半轴上各取一点 $F_1(h_1,0)$, $F_2(-h_2,0)$ 使 $h_1>0>-h_2$. 要求从 F_1 发出的光线经过反射之后看起来是从 F_2 射出的.

然后利用实验 2 所说方法，分别找出满足上述要求的镜面曲线，观察并猜测曲线的形状，画图验证你的猜测.

2.5 曲线与方程

解析几何就是用代数方法研究几何图形，解决有关几何图形的问题．它的基本方法，是将几何图形及其性质用代数语言来描述，利用代数运算的方法加以解决，再将所得的代数的结果翻译为几何的语言．

反过来，对一些代数问题，也可以用几何的模型加以解释，用几何的方法加以解决．

曲线是最重要的平面图形．我们已经用解析几何的方法研究了直线、圆锥曲线等简单的曲线．

研究曲线的基本方法是：

在平面上适当建立直角坐标系，将每个点 P 用坐标 $(x,\ y)$ 表示．

曲线通常是满足一定条件的点的轨迹．也就是说：满足这个条件的点都在这条曲线上，曲线上的点都满足这个条件．

将曲线上的点满足的几何条件转换成点的坐标满足的代数等式，经化简得到曲线的方程．

点在曲线上⇔点的坐标满足方程．

此时，方程叫曲线的方程，曲线叫方程的曲线．

以抛物线为例．

抛物线是到定点 F 和定直线 l 距离相等的点的轨迹．

建立直角坐标系使 F 的坐标为 $\left(\frac{p}{2},\ 0\right)$，$l$ 的方程为 $x=-\frac{p}{2}$，则

点 $P(x,\ y)$ 在抛物线上⇔$|PF|$等于 P 到 l 的距离（几何描述）

$$\Leftrightarrow\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}=\left|x+\frac{p}{2}\right|\text{（代数等式）}$$

$$\Leftrightarrow y^2=2px\text{（方程）}.$$

假如将轨迹的点满足的几何性质稍加改变，改为：

到一个定点和一条定直线的距离之比为某个定值 $e>0$．

轨迹是什么形状的曲线？

当然，$e=1$ 的时候仍是抛物线．$e\neq 1$ 的时候呢？

让我们试一试．

例1 任意给定常数 e（$e>0$），定点 F 和定直线 l（$F\notin l$）．动点 P 到 F 的距离 d_1 与 P 到 l 的距离 d_2 之比等于 e．选择适当的直角坐标系建立点 P 的轨迹的方程．

解 设点 F 到 l 的距离为 $p>0$．不妨以 F 为原点建立直角坐标系，使 x 轴垂直于 l（如图2-34），则 l 的方程为 $x=-p$．

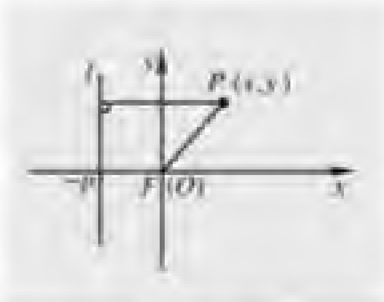


图2-34

$d_1=|PF|=\sqrt{x^2+y^2}$，$d_2=|x+p|$．

点 P 满足的条件 $\dfrac{d_1}{d_2}=e$，即 $d_1=ed_2$ 成为

$$\sqrt{x^2+y^2}=e|x+p|.\qquad ①$$

两边平方，并整理得

$$(1-e^2)x^2+y^2-2pe^2x-e^2p^2=0.\qquad ②$$

这就是点 P 的轨迹的方程．

我们得出了轨迹的方程②，但是并不认识它是什么曲线的方程．

当 $e=1$ 时，方程②成为 $y^2-2px-p^2=0$，可写为

$$y^2=2p\left(x+\frac{p}{2}\right).\qquad ③$$

将它的图象向右移动 $\dfrac{p}{2}$，将原来每个点 $P(x,y)$ 移动到新的位置 $P'(x',y')$，其中 $x'=x+\dfrac{p}{2}$，$y'=y$，则移动后图象上所有的点 P' 的坐标 (x',y') 满足的方程为

$$y'^2=2px'.\qquad ④$$

这是抛物线的标准方程．

当 $0<e<1$ 或 $e>1$ 时方程②的图象是什么曲线？先画出图来观察．

在研究三角函数的图象时，将 $y=\sin x$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位，就得到 $y=\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象．这种也是采用同样的方法．

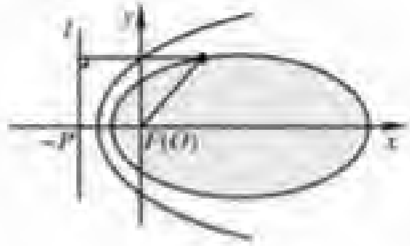


图 2－35

观察发现，当 $0<e<1$ 时画出的图象可能是椭圆，当 $e>1$ 时可能是双曲线．椭圆和双曲线的焦点都在原点，也就是定点 F．椭圆的长轴和双曲线的实轴都在 x 轴上（见图 2－35）．为了验证具有标准方程 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的椭圆上的点 $P(x,y)$ 是否到一个焦点 F_1 的距离 $|PF_1|$ 和 P 到某条垂直于 x 轴的直线 $x=k$ 的距离 $|x-k|$ 之比为一个定值，我们研究 $|PF_1|$ 与 x 之间的关系．

例 2 在椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 中，已知点 P 的横坐标 x，求点 P 到焦点 $F_1(-c,0)$ 的距离 d，并将所得的结果化简．

解 设 P 的坐标为 (x,y)，则

$$d=|PF_1|=\sqrt{(x+c)^2+y^2}. \quad ①$$

由 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 得 $y^2=b^2-\frac{b^2}{a^2}x^2$．代入①得

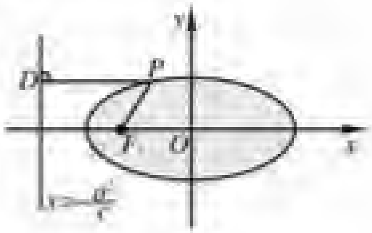


图 2－36

$$d=\sqrt{x^2+2cx+c^2+b^2-\frac{b^2}{a^2}x^2}$$

$$=\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}x^2+2cx+(c^2+b^2)}. \quad ②$$

将 $a^2-b^2=c^2$ 及 $b^2+c^2=a^2$ 代入②得

$$d=\sqrt{\left(\frac{cx}{a}\right)^2+2cx+a^2}=\sqrt{\left(\frac{cx}{a}+a\right)^2}=\frac{c}{a}\left|x+\frac{a^2}{c}\right|. \quad ③$$

观察发现，例2最后得到的表达式③中的 $\left|x+\frac{a^2}{c}\right|$ 就是点 $P(x,y)$ 到直线 $x=-\frac{a^2}{c}$ 的距离，如图 2－36．因此，这个表达式的几何意义是：

椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$上的每一点到焦点$F_1(-c,0)$的距离与它到直线$x=-\frac{a^2}{c}$的距离之比等于常数$\frac{c}{a}$.

由于$a>c>0$，上面所得到的比值$e=\frac{c}{a}$是小于1的正实数. c是椭圆的焦点偏离中心的距离，e反映了椭圆的焦点偏离中心的程度，称为椭圆的离心率（eccentricity）.

学习解析几何，就要学会将几何特征用代数表达式来描述，又要善于理解代数表达式的几何意义，真正领略“代数几何统一性”.

注意

$$\frac{b}{a}=\sqrt{1-\left(\frac{c}{a}\right)^2}=\sqrt{1-e^2}.$$

因此，离心率e越小（接近于0），$\frac{b}{a}$就越大（接近于1），椭圆的短半轴b与长半轴a就越接近，椭圆就越接近圆. 当离心率$\frac{c}{a}=0$时也就是$c=0$，$b=a$，椭圆就变成圆. 反之，离心率e越大（接近于1），$\frac{b}{a}$就越小（接近于0），b与a的悬殊就越大，椭圆就越“扁”，与圆的差距就越大. 因此，离心率e的大小反映了椭圆偏离圆的程度.

既然椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$上任一点到焦点$F_1(-c,0)$和直线$x=-\frac{a^2}{c}$的距离之比等于固定值$\frac{c}{a}$，很自然要问：

如果动点P到点$F_1(-c,0)$与直线$x=-\frac{a^2}{c}$的距离之比等于常数$\frac{c}{a}$，点P的轨迹是什么？是否就是椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$？

已经知道这个椭圆上的点都在这个轨迹上，但是否还有别的点在这个轨迹上呢？因此，仍然需要研究.

例3 设$a>c>0$，动点$P(x,y)$到定点$F(-c,0)$和定直线$x=-\frac{a^2}{c}$的距离之比等于$\frac{c}{a}$，求点P的轨迹的方程.

解 P到F_1的距离$d_1=|PF_1|=\sqrt{(x+c)^2+y^2}$.

P到直线$x=-\frac{a^2}{c}$的距离$d_2=\left|x+\frac{a^2}{c}\right|$.

因此，

$$\begin{aligned}\frac{d_1}{d_2}=\frac{c}{a} &\Leftrightarrow \sqrt{(x+c)^2+y^2}=\frac{c}{a}\left|x+\frac{a^2}{c}\right| \\ &\Leftrightarrow (x+c)^2+y^2=\left(\frac{c}{a}x+a\right)^2 \\ &\Leftrightarrow \left(1-\frac{c^2}{a^2}\right)x^2+y^2=a^2-c^2 \\ &\Leftrightarrow \frac{b^2}{a^2}x^2+y^2=b^2 \\ &\Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.\end{aligned}$$

所求的方程为$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，轨迹是椭圆.

对任何一个椭圆，都可以适当选择坐标系使它的方程具有标准形式$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. 按照例 2 所得的结果，可以将这个椭圆看成到一个定点和一条定直线的距离之比等于一个定值$e=\frac{c}{a}\in(0,1)$的点的轨迹. 这个定点就是椭圆的一个焦点$F_1(-c,0)$，这条定直线$x=-\frac{a^2}{c}$称为椭圆的准线.

将平面上所有的点(x,y)绕原点旋转$180°$，变到它关于原点的对称点$(-x,-y)$. 椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$仍变到自身，它的焦点$F_1(-c,0)$变到另一个焦点$F_2(c,0)$，准线$x=-\frac{a^2}{c}$变到直线$x=\frac{a^2}{c}$. 因此，这个椭圆也是到定点$F_2$与到直线$x=\frac{a^2}{c}$的距离之比等于$\frac{c}{a}$的点的轨迹. 也就是说，直线$x=\frac{a^2}{c}$是这个椭圆的另一条准线.

因此，椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$有两条准线$x=\pm\frac{a^2}{c}$.

例 4 任给正实数$e<1$，点F，直线l，且$F\notin l$. 设动点P到F的距离与P到l的距离之比等于常数e. 动点P的轨迹是什么形状?

分析 只要能找到适当的$a>c>0$使$e=\frac{c}{a}$，并建立适当的直角

坐标系，使点 F 的坐标为 $(-c,0)$，l 的方程 $x=-\frac{a^2}{c}$，则由例 3 知道轨迹在此坐标系下的方程是椭圆的标准方程，轨迹是椭圆.

解 椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的焦点 $F_1(-c,0)$ 与准线 $x=-\frac{a^2}{c}$ 之间的距离

$$d=\frac{a^2}{c}-c=\frac{a^2-c^2}{c}=\frac{a^2-e^2a^2}{ea}=\frac{1-e^2}{e}a,$$

其中 $e=\frac{c}{a}$.

设点 F 到直线 l 的距离等于 $p>0$.

取 $a=\frac{ep}{1-e^2}$，则 $p=\frac{1-e^2}{e}a$. 取 $c=ea$，则 $e=\frac{c}{a}$.

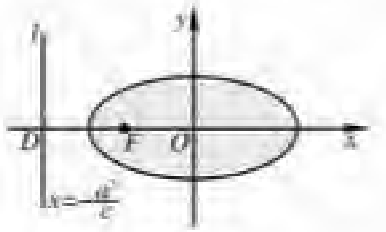


图 2－37

过 F 作 l 的垂线 FD 交 l 于 D. 延长 DF 到 O 使 $|FO|=c$，如图 2－37. 则

$$\begin{aligned}|DO|&=|DF|+|FO|\\&=p+c=\frac{1-e^2}{e}a+ea=\frac{1}{e}a=\frac{a}{c}\cdot a=\frac{a^2}{c}.\end{aligned}$$

以 O 为原点、$\overrightarrow{DO}$ 的方向为 x 轴正方向建立直角坐标系，则 F 的坐标为 $(-c,0)$，l 的方程为 $x=-\frac{a^2}{c}$. 根据例 3 的结果，到 F 的距离与到 l 的距离之比等于 e 的点的轨迹就是椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，其中 $b=\sqrt{a^2-b^2}$.

仿照例 2，例 3，例 4 的方法对双曲线进行研究，可以发现：

对任给的常数 $e>1$，点 F 和直线 $l(F\notin l)$，到 F 的距离与到 l 的距离等于 e 的点的轨迹是双曲线. F 是双曲线的一个焦点，l 称为双

曲线的一条准线，e 称为双曲线的离心率.

双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 的离心率 $e=\frac{c}{a}$，相应于它的两个焦点 $F_1(-c,0)$，$F_2(c,0)$ 各有一条准线 $x=-\frac{a^2}{c}$ 和 $x=\frac{a^2}{c}$.

如果让椭圆的两个焦点重合为一点，使 $c=0$，则椭圆变成圆，焦点是它的圆心，按此规定圆的离心率 $e=\frac{c}{a}=0$，但是圆没有准线.

在有些书籍和资料中常常将圆看成椭圆的特殊情况，但在中学教材中将椭圆与圆看成不同的曲线.

由以上关于椭圆、双曲线的结果以及抛物线的定义，可以总结出关于圆锥曲线的如下一般结论：

任意给定常数 e（$e>0$）、点 F 和直线 l（$F\notin l$）．设动点 P 到 F 的距离和到 l 的距离之比等于 e，则 P 的轨迹是圆锥曲线．F 是这条圆锥曲线的焦点，l 称为它的准线.

当 $e<1$ 时 P 的轨迹是椭圆，当 $e=1$ 时是抛物线，当 $e>1$ 时是双曲线.

这可以看作圆锥曲线的统一的定义．这样定义出来的轨迹包括除了圆之外的所有的圆锥曲线.

根据圆锥曲线的上述统一定义，我们知道本节例 1 中的轨迹是圆锥曲线，例 1 中得出的方程

$$(1-e^2)x^2+y^2-2pe^2x-e^2p^2=0,$$

可以看作是除了圆以外的圆锥曲线的统一方程.

当 $e=1$，$0<e<1$ 或 $e>1$ 时曲线分别是抛物线、椭圆、双曲线．但例 1 中得出的方程不是它们的标准方程.

有兴趣的同学可以自己试一试.

当 $e=1$ 时，我们已经将曲线适当平行移动使得移动后的曲线经过原点，方程不含常数项，成为抛物线的标准方程.

当 $e\neq1$ 时，可以将这个方程的图象适当移动位置，使摆放在新的位置的曲线的方程不含一次项，曲线关于原点对称，方程成为椭圆或双曲线的标准方程.

例 5 讨论椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 与直线 $Ax+By+C=0$ 的公共点的个数.

解 设直线方程为 $Ax+By+C=0$，其中 A，B 不全为 0．讨论方程组

$$\begin{cases}Ax+By+C=0, \\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\end{cases} \quad ①$$

的解的不同情况.

令$\dfrac{x}{a}=x'$，$\dfrac{y}{b}=y'$，则上述方程组变为

$$\begin{cases}aAx'+bBy'+C=0, \\ x'^2+y'^2=1.\end{cases} \quad ②$$

在直角坐标系中，坐标(x',y')满足方程$aAx'+bBy'+C=0$的所有的点组成一条直线，满足方程$x'^2+y'^2=1$的所有的点组成一个圆，方程组②的解的组数也就是这条直线与这个圆的公共点的个数.

圆$x'^2+y'^2=1$的圆心$(0,0)$到直线$aAx'+bBy'+C=0$的距离

$$d=\frac{|C|}{\sqrt{a^2A^2+b^2B^2}}.$$

当$d<1$，$d=1$或$d>1$时，圆$x'^2+y'^2=1$与直线$aAx'+bBy'+C=0$分别相交、相切、相离，公共点个数分别是2，1，0，方程组②的解的组数也分别是2，1，0，而$d<1$，$d=1$或$d>1$的充分必要条件分别是$C^2<a^2A^2+b^2B^2$，$C^2=a^2A^2+b^2B^2$，$C^2>a^2A^2+b^2B^2$.

于是得到：

当$C^2<a^2A^2+b^2B^2$时，直线与椭圆有两个公共点；

当$C^2>a^2A^2+b^2B^2$时，直线与椭圆有一个公共点；

当$C^2=a^2A^2+b^2B^2$时，直线与椭圆没有公共点.

实际上，在这三种情况下，直线与椭圆分别相交、相切、相离.

例5中通过方程的变量代换将椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$与直线$Ax+By+C=0$位置关系问题转化为圆$x'^2+y'^2=1$与直线$aAx'+bBy'+C=0$的位置关系问题来解决.

想一想，你能否将一般的双曲线$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$与直线$Ax+By+C=0$的位置关系问题转化为特殊的双曲线$x'^2-y'^2=1$与直线$aAx'+bBy'+C=0$的位置关系问题，再利用本章2.2.2例5的结论来解决？

练 习

1. 求下列各圆锥曲线的离心率，准线方程.

(1) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$；　　(2) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$；

(3) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$；　　(4) $-\frac{x^2}{4}+y^2=1$.

2. 已知双曲线$\frac{x^2}{9-k}+\frac{y^2}{k-4}=1$的离心率$e<2$，则$k$的取值范围是________.

3. 求中心在原点，准线为$x=\pm 4$，$e=0.5$的椭圆方程.

4. 若F_1，F_2分别是椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$的左、右焦点，$P$是以$F_1$，$F_2$为直径的圆与椭圆的一个交点，且$\angle PF_1F_2=5\angle PF_2F_1$，求该椭圆的离心率$e$.

5. 已知椭圆的两焦点为$F_1(-\sqrt{3},0)$、$F_2(\sqrt{3},0)$，$e=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(1) 求此椭圆的方程；

(2) 设直线l：$y=x+m$与此椭圆交于P，Q两点，$|PQ|$等于椭圆的短半轴长，求m值.

习题 5

学而时习之

1. 已知椭圆$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{m}=1$的离心率为$\frac{1}{2}$，则$m=$（　　）

(A) $m=3$　　(B) $m=\frac{16}{3}$　　(C) $m=-3$或$-\frac{16}{3}$　　(D) $m=3$或$\frac{16}{3}$

2. 椭圆$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$上的点$M$到左准线的距离为$\frac{5}{2}$，则$M$到右焦点的距离为（　　）

(A) 8　　(B) $\frac{25}{6}$　　(C) $\frac{9}{2}$　　(D) $\frac{15}{8}$

3．已知双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$的半焦距为$c$，直线$l$过点$(a,0)$，$(0,b)$，且原点到直线$l$的距离为$\frac{\sqrt{3}}{4}c$，求双曲线的离心率、准线方程，渐近线方程．

温故而知新

4．椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$）满足$a\leqslant\sqrt{3}b$，若离心率为$e$，求$e^2+\frac{1}{e^2}$的最小值．

5．设$\alpha\in[0,2\pi)$，方程$x^2\sin\alpha+y^2\cos\alpha=1$表示离心率不小于$\sqrt{2}$的双曲线，求$\alpha$的范围．

6．已知椭圆方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$内有一点$P(1,-1)$，$F$为右焦点，试在椭圆上求一点$M$，使得$|MP|+2|MF|$最小．

数学文化

圆锥曲线小史

平面在圆锥面上截得的不同曲线称为圆锥曲线．当平面与圆锥面的轴线垂直时，截得的曲线是一个圆，当平面与圆锥面的轴线不垂直，随着夹角逐渐变小，截得的曲线分别是一个椭圆，一条抛物线，或者双曲线的一支．

在平面直角坐标系中，圆锥曲线又称为二次曲线．

圆锥曲线的研究具有悠久的历史，圆锥曲线的性质在实际中具有广泛的应用．

早在公元前350年，柏拉图学派的梅内克缪斯（Menaechmus）为了解决三等分角问题和倍立方问题，首先系统地研究了圆锥曲线．欧几里得（Euclidean）、阿基米德（Archimeds）都写了圆锥曲线方面的著作，阿基米德证明了，由抛物线与它的弦围成的图形，它的面积等于弦与弦两端的切线所构成的三角形面积的2/3．对圆锥曲线性质的研究而闻名于世的首推古希腊著名的几何学家、天文学家阿波罗尼奥斯（Appllonius，约公元前262—前190），他是欧几里得的学生，在亚历山大学派中与欧几里得、阿基米德齐名的三大学者之一．他首先证明了三种圆锥曲线都可以通过用一个平面与圆锥面相截而得到，而且知道了圆锥曲线的光学性质．他所写的《圆锥曲线论》是一本全面、系统、具有独创性的古希腊几何杰作．在此后一千多年的时间内，后人（至少在几何上）几乎不能再为它增添什么新的内容．

17世纪中叶，笛卡儿（Descartes）发明了解析几何学，利用坐标法对圆锥曲线重新进行了研究，发现二次曲线，在建立适当的坐标系后，一般总能归结为椭圆、抛物线和双曲线的标准方程，因

此，圆锥曲线又称为二次曲线.

圆锥曲线的理论具有广泛的应用．除了应用圆锥曲线的光学性质之外，天体运行的轨道遵循圆锥曲线的规律．开普勒（Kepeler，1571—1630）在长期天文观察的基础上，发现了行星沿椭圆轨道运动，并提出了著名的行星运动三定律．牛顿（Newton，1642—1727）对开普勒的成就加以发展，发现了万有引力定律，利用数学严格地计算出：当初始速度为 7.9 km/s 时，物体的轨道是一个圆；当初始速度超过 7.9 km/s，但小于 11.2 km/s 时，物体的轨道是一个椭圆；而当初始速度大于 11.2 km/s 时，物体将沿着抛物线的轨道远离地球永不回头.

小结与复习

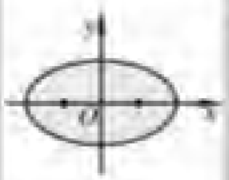
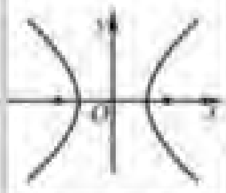
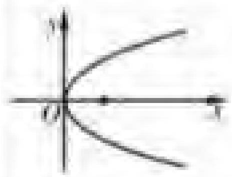
一、指导思想

学习本章的目的，不仅是为了掌握圆锥曲线的定义和性质，还要更进一步学习如何用代数方法（坐标方法）研究几何问题．同时要学习如何利用运动的观点思考问题，如何利用数学研究运动变化着的现实世界．

二、内容提要

这一章的主要内容包括椭圆、双曲线、抛物线的定义、标准方程、简单几何性质，以及它们在实际中的一些应用．

1．三种曲线的标准方程(各取其中一种)、图形、性质如下表：

	椭　圆	双曲线	抛物线
几何条件	与两个定点的距离的和等于常数（但大于两定点之间的距离）	与两个定点的距离的差的绝对值等于常数（但小于两定点之间的距离）	与一个定点和一条定直线的距离相等
标准方程	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0，b>0)$	$y^2=2px$ $(p>0)$
图　形			
顶点坐标	$(\pm a，0)$，$(0，\pm b)$	$(\pm a，0)$	$(0，0)$

续表

	椭　圆	双曲线	抛物线
对称轴	x 轴，长轴长 $2a$； y 轴，短轴长 $2b$	x 轴，实轴长 $2a$； y 轴，虚轴长 $2b$	x 轴
焦点坐标	$(\pm c, 0)$ $c=\sqrt{a^2-b^2}$	$(\pm c, 0)$ $c=\sqrt{a^2+b^2}$	$\left(\frac{p}{2}, 0\right)$
离心率	$0<e<1$，$e=\frac{c}{a}$	$e>1$，$e=\frac{c}{a}$	$e=1$
准线方程	$x=\pm\frac{a^2}{c}$	$x=\pm\frac{a^2}{c}$	$x=-\frac{p}{2}$
渐近线方程		$y=\pm\frac{b}{a}x$	

2. 圆、椭圆、双曲线、抛物线统称圆锥曲线，它们的统一性如下：

（1）从方程的形式看：在直角坐标系中，这几种曲线的方程都是二元二次的，所以它们属于二次曲线．

（2）从点的集合（或轨迹）的观点看：除了圆以外，它们都是与定点和定直线距离的比是常数 e 的点的集合（或轨迹），这个定点是它们的焦点，定直线是它们的准线．只是由于离心率 e 取值范围的不同，而分为椭圆、双曲线和抛物线三种曲线．

在科学研究和应用中常常将圆看成椭圆的特殊情况，但在中学教材中将椭圆与圆看成不同的曲线．

（3）从几何学的观点来看：它们都是由平面截圆锥面得到的截线（见本章章头图）．

在宇宙间运动的天体，如行星、彗星、人造卫星等，由于运动速度的不同，它们的轨道有的是圆，有的是椭圆，有的是抛物线，有的是双曲线（图 2－38）．

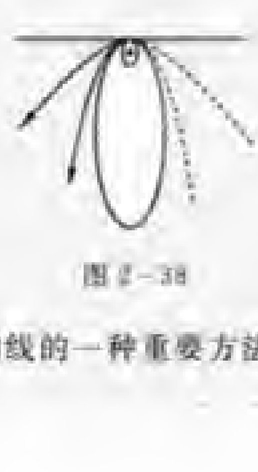


图 2－38

3. 坐标法是研究曲线的一种重要方法．本章在必修第三册第

7 章的基础上进一步学习了求曲线方程的一般方法，如何利用曲线的方程和曲线的几何性质以及用坐标法解简单的几何问题等.

4. 椭圆、双曲线、抛物线是常见的曲线，利用它们的方程及几何性质，可以帮助我们解决一些简单的实际问题. 本章通过例题，给出了解决某些实际问题的一般方法.

三、学习要求和需要注意的问题

1. 学习要求.

(1) 掌握三种圆锥曲线的定义、标准方程和简单的几何性质；

(2) 能够根据具体条件，利用各种不同的工具画椭圆、双曲线、抛物线的图形；

(3) 了解圆锥曲线的实际背景，感受圆锥曲线在刻画现实世界和解决实际问题中的作用；

(4) 通过已学习过的圆锥曲线的知识，了解曲线与方程的对应关系，进一步感受数形结合思想.

2. 需要注意的问题.

(1) 在引入曲线时，应通过丰富的实例，使学生了解圆锥曲线的背景与应用；

(2) 曲线与方程的教学应以学习过的曲线为主，注重使学生体会曲线与方程的对应关系，感受数形结合的基本思想；

(3) 本章研究几何图形时，大量采用了坐标法，所以在解答问题时，最好先画出草图，注意观察、分析图形的特征. 同时在解决实际问题时，要注意选择适当的坐标系，使问题变得简单.

四、参考例题

例 1 一动圆与圆 $x^2+y^2+6x+5=0$ 外切，同时与圆 $x^2+y^2-6x-91=0$ 内切，求动圆圆心的轨迹方程，并说明它是什么样的曲线.

分析 本题可以按求点的轨迹方程的一般方法来解. 设动圆圆心的坐标为 (x, y)，利用初中学过的两圆相切的性质和判定定理

（即充要条件）列出方程，最后化简整理.

本题也可以从分析图形入手来寻找解题思路. 设动圆的半径为 R，由图 2－39 可知，

$$|O_1P|=|O_1M|+R,\ |O_2P|=|O_2N|-R.$$

因为

$$|O_1P|+|O_2P|=|O_1M|+R+|O_2N|-R=|O_1M|+|O_2N|$$

为常数，利用椭圆的定义，可以直接求出它的方程.

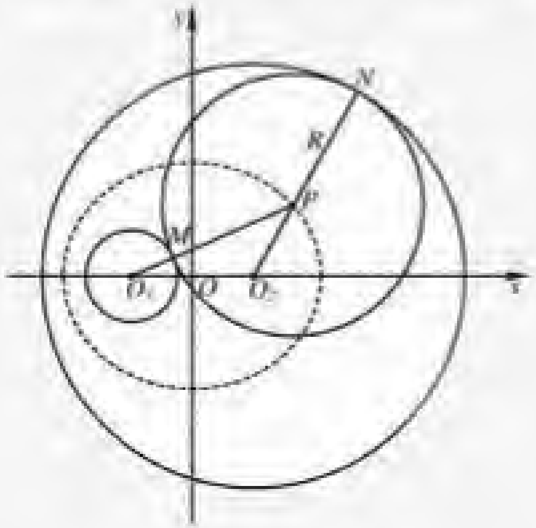


图 2－39

解法 1 如图 2－39，设动圆圆心为 $P(x,\ y)$，半径为 R，两已知圆的圆心分别为 O_1，O_2.

分别将两已知圆的方程

$$x^2+y^2+6x-5=0,$$

$$x^2+y^2-6x-91=0$$

配方，得

$$(x+3)^2+y^2=4,$$

$$(x-3)^2+y^2=100.$$

当⊙P 与⊙O_1：$(x+3)^2+y^2=4$ 外切时，有

$$|O_1P|=R+2, \quad ①$$

当⊙P 与⊙O_2：$(x-3)^2+y^2=100$ 内切时，有

$$|O_2P|=10-R. \quad ②$$

①，②两式的两边分别相加，得

$$|O_1P|+|O_2P|=12.$$

即

$$\sqrt{(x+3)^2+y^2}+\sqrt{(x-3)^2+y^2}=12. \quad ③$$

化简方程③，先移项，再两边分别平方，并整理，得

$$2\sqrt{(x+3)^2+y^2}=12+x. \quad ④$$

将④两边分别平方，并整理，得

$$3x^2+4y^2-108=0. \quad ⑤$$

将常数项移至方程的右边，两边分别除以108，得

$$\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{27}=1. \quad ⑥$$

由方程⑥可知，动圆圆心的轨迹是椭圆，它的长轴和短轴长分别为12，$6\sqrt{3}$，如图2-39中虚线所示.

解法2 同解法1得方程

$$\sqrt{(x+3)^2+y^2}+\sqrt{(x-3)^2+y^2}=12. \quad ①$$

由方程①可知，动圆圆心$P(x,y)$到点$O_1(-3,0)$和点$O_2(3,0)$距离的和是常数12，所以点P的轨迹是焦点为$(-3,0)$和$(3,0)$，长轴长等于12的椭圆，并且这个椭圆的中心与坐标原点重合，焦点在x轴上，于是可求出它的标准方程.

∵ $2c=6$，$2a=12$，

∴ $c=3$，$a=6$.

∴ $b^2=36-9=27$.

于是得动圆圆心的轨迹方程为

$$\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{27}=1.$$

这个椭圆的长轴和短轴的长分别为12，$6\sqrt{3}$，图形如图2-39中虚线所示.

例2 如图2-40，直线$y=x-2$与抛物线$y^2=2x$相交于点A，B.（1）求证$OA\perp OB$；（2）求$|AB|$的长.

证法1 设A，B两点的坐标为$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，将y

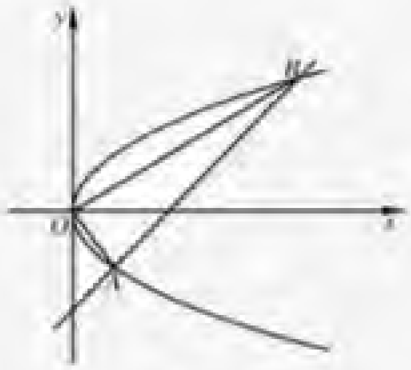


图 2-40

$=x-2$ 代入 $y^2=2x$ 中，得

$$(x-2)^2=2x.$$

化简得 $$x^2-6x+4=0.$$

解得 $$x_1=3-\sqrt{5},\ x_2=3+\sqrt{5}.$$

则 $$y_1=1-\sqrt{5},\ y_2=1+\sqrt{5}.$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}&=(x_1,y_1)\cdot(x_2,y_2)\\&=x_1x_2+y_1y_2\\&=(3-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})+(1-\sqrt{5})(1+\sqrt{5})\\&=0.\end{aligned}$$

$\therefore\ OA\perp OB.$

$$|AB|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}=2\sqrt{10}.$$

证法2 同证法1得方程

$$x^2-6x+4=0.$$

由一元二次方程根与系数的关系，可知

$$x_1+x_2=6,\quad x_1\cdot x_2=4.$$

$\because\ y_1=x_1-2,\ y_2=x_2-2,$

$$\begin{aligned}\therefore\ y_1\cdot y_2&=(x_1-2)(x_2-2)\\&=x_1\cdot x_2-2(x_1+x_2-2)\\&=x_1\cdot x_2-2(x_1+x_2)+4\\&=4-12+4\\&=-4.\end{aligned}$$

$\therefore\ \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=x_1x_2+y_1y_2$

$=4+(-4)=0.$

$\therefore\ OA\perp OB.$

$$|AB|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$$
$$=\sqrt{2}\cdot\sqrt{(x_1-x_2)^2}$$
$$=\sqrt{2}\cdot\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}$$
$$=\sqrt{2}\cdot\sqrt{36-16}=2\sqrt{10}.$$

注 当方程中系数为字母或绝对值较大的数时，证法 2 比证法 1 简单，对于椭圆、双曲线更是如此.

例 3 如图 2－41 所示，已知$\triangle OFQ$的面积为S，且$\overrightarrow{OF}\cdot\overrightarrow{FQ}=1$，设$|\overrightarrow{OF}|=c$，$S=\frac{\sqrt{14}}{4}c$，若以$O$为中心，$F$为焦点的双曲线经过点$Q$，建立适当的直角坐标系，求$|\overrightarrow{OQ}|$最小时此双曲线方程.

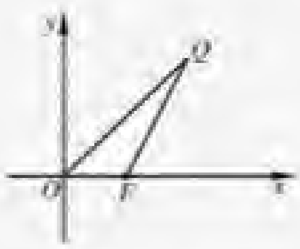


图 2－41

解 如图 2－41 所示建立直角坐标系，设双曲线方程为$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$，设$Q(x_1,y_1)$，则$\overrightarrow{FQ}=(x_1-c,y_1)$.

$\because\ S=\frac{1}{2}|\overrightarrow{OF}|\cdot y_1=\frac{\sqrt{14}}{4}c$，$\quad\therefore\ y_1=\frac{\sqrt{14}}{2}$.

又$\because\ \overrightarrow{OF}\cdot\overrightarrow{FQ}=(c,0)\cdot\left(x_1-c,\frac{3}{2}\right)=(x_1-c)c=1$，

$\therefore\ x_1=c+\frac{1}{c}$，$\quad\therefore\ |\overrightarrow{OQ}|=\sqrt{x_1^2+y_1^2}=\sqrt{\left(c+\frac{1}{c}\right)^2+\frac{7}{2}}$.

$\because\ c>0$，$\quad\therefore$ 当$c=1$时$|\overrightarrow{OQ}|$最小.

$\therefore\ x_1=2$，$\quad\therefore$ 点Q的坐标为$Q\left(2,\frac{\sqrt{14}}{2}\right)$.

$$\therefore\quad \begin{cases} \dfrac{4}{a^2}-\dfrac{7}{2b^2}=1, \\ a^2+b^2=1. \end{cases}\quad 解之得\quad \begin{cases} a^2=\dfrac{1}{2}, \\ b^2=\dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

故所求双曲线方程为 $\dfrac{x^2}{\frac{1}{2}}-\dfrac{y^2}{\frac{1}{2}}=1$.

即 $2x^2-2y^2=1$.

复习题二

学而时习之

1. 根据下列条件判断方程 $\dfrac{x^2}{9-k}+\dfrac{y^2}{4-k}=1$ 表示什么曲线.

   (1) $k<4$；　　　　(2) $4<k<9$.

2. 当 α 从 0° 到 180° 时，曲线 $x^2+y^2\cos\alpha=1$ 怎样变化？

3. 方程 $x^2-4x+1=0$ 的两个根可分别作为（　　）

   (A) 一椭圆和一双曲线的离心率

   (B) 两抛物线的离心率

   (C) 一椭圆和一抛物线的离心率

   (D) 两椭圆的离心率

4. 与两圆 $x^2+y^2=1$ 及 $x^2+y^2-8x+12=0$ 都外切的圆的圆心在（　　）

   (A) 一个椭圆上　　　　(B) 双曲线的一支上

   (C) 一条抛物线上　　　　(D) 一个圆上

5. 已知△ABC 三边 AB，BC，CA 的长成等差数列，且 $|AB|>|CA|$，点 B，C 的坐标分别为 $(-1,0)$，$(1,0)$，求点 A 的轨迹方程，并指出它是什么曲线.

6. 在椭圆 $\dfrac{x^2}{45}+\dfrac{y^2}{20}=1$ 上求一点，使它与两个焦点的连线互相垂直.

7. 曲线$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$与曲线$\frac{x^2}{25-k}+\frac{y^2}{9-k}=1$（$k<0$）的（　　）

（A）长、短轴相等　　　　（B）焦距相等

（C）离心率相等　　　　（D）准线相同

8. 直线 $x-2y+2=0$ 与椭圆 $x^2+4y^2=4$ 相交于 A，B 两点，求 A，B 两点的距离.

9. 已知中心在原点的双曲线的一个焦点是 $F_1(-4, 0)$，一条渐近线的方程是 $3x-2y=0$，求双曲线的方程.

10. 双曲线的离心率等于$\frac{\sqrt{5}}{2}$，且与椭圆$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$有公共焦点，求此双曲线的方程.

11. 已知双曲线的离心率为 2，求它的两条渐近线所成的锐角.

12. 一个圆的圆心在双曲线 $3x^2-y^2=12$ 的右焦点上，并且此圆过原点，求这个圆的方程.

13. 如果直线 $y=kx-1$ 与双曲线 $x^2-y^2=4$ 没有公共点，求 k 的取值范围.

14. 一圆经过点 $F(0, 3)$，且和直线 $y+3=0$ 相切，求圆心的轨迹方程，并画出图形.

15. 求抛物线 $y^2=2px$（$p>0$）上各点与焦点连线中点的轨迹方程.

16. 设抛物线的顶点为 O，经过焦点垂直于轴的直线和抛物线交于两点 B，C，经过抛物线上一点 P 垂直于轴的直线和轴交于点 Q，求证：线段 $|PQ|$ 是 $|BC|$ 和 $|OQ|$ 的比例中项.

17. 已知某荒漠上有两定点 A，B，它们相距 2 km，现准备在荒漠上围垦出一片以 AB 为一条对角线的平行四边形区域建成农艺园，按照规划，围墙总长为 8 km. 又该荒漠上有一条直线水沟 l 恰好经过点 A，且与 AB 成 30° 角，现要对整条水沟进行加固，但考虑到今后农艺园的水沟要重新设计改造，所以对水沟可能被农艺园围进的部分暂不加固，问暂不加固的部分有多长？

温故而知新

18. 设 F_1，F_2 是双曲线$\frac{x^2}{4}-y^2=1$的两个焦点，点 P 是双曲线上一点，且$\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}=0$，则$|\overrightarrow{PF_1}|\cdot|\overrightarrow{PF_2}|=$（　　）

(A) 2　　(B) $8\sqrt{2}$　　(C) 4　　(D) 8

19. 过抛物线 $y^2=2px$ ($p>0$) 的焦点 F 的直线与抛物线相交于 A，B 两点，自 A，B 向准线作垂线，垂足分别为 A'，B'，求证 $\angle A'FB'=90°$.

20. 点 P 是椭圆 $16x^2+25y^2=1\,600$ 上一点，F_1，F_2 是椭圆的两个焦点，又知点 P 在 x 轴上方，F_2 为椭圆的右焦点，直线 PF_2 的斜率为 $-4\sqrt{3}$，求 $\triangle PF_1F_2$ 的面积.

21. 人造地球卫星的运行轨道是以地心为一个焦点的椭圆. 设地球半径为 R，卫星近地点、远地点离地面的距离分别为 r_1，r_2，求卫星轨道的离心率.

22. 两定点的坐标分别为 $A(-1, 0)$，$B(2, 0)$，动点 M 满足条件 $\angle MBA=2\angle MAB$，求动点 M 的轨迹方程.

23. 求曲线 $y^2=-4-2x$ 上与原点距离最近的点的坐标.

24. 设直线 l 与抛物线 $y^2=2px$ ($p>0$) 交于 $A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$ 两点，其中 $y_1>y_2$.

(1) 若 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{OX}=0$，求 l 与 x 轴的交点坐标；

(2) 是否存在定点 M，使得当 l 经过 M 时，总有 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$ 成立.

上下而求索

中心投影与圆锥曲线

25. 平面 α 与平面 β 不平行，点 $S\notin\alpha$ 且 $S\notin\beta$. 从 S 向平面 α 作垂线，垂足为 O，以 O 为圆心在平面 α 上作圆 O.

(1) 以 S 为中心作中心投影，将圆 O 投射到平面 β 上，得到什么曲线？

(2) 在平面 α 内再作若干条直线，分别与圆 O 相交、相切或相离. 以 S 为中心作中心投影将圆和直线投射到平面 β 上，圆的投射像与直线的投射像可能有什么位置关系？

(3) 改变平面 β 的方向，同样研究上面的问题，看看有什么可能的结果；

(4) 可以利用几何知识从理论上研究上述问题，也可以用实验方法研究.

如果用实验方法研究，可以用玻璃板作为平面 α，将图形画在上面；以墙面或桌面作为平面 β. 在点 S 处放置点光源将玻璃板上的图形照射到墙上或桌面上.

第3章 空间向量与立体几何

向量不但是处理平面几何图形的强有力工具，也是处理空间图形的强有力工具.

空间向量的知识不需花多少时间来重新学习，重要的是要学会用向量及其运算来描述空间图形及其性质，解决空间图形的有关问题.

3.1 尝试用向量处理空间图形

在必修第二册第 4 章中，我们已经学习了向量的一些基本知识，并且利用这些知识解决了有关平面图形的一些问题。

我们已学过的向量知识是否已够用来处理空间图形的问题呢？

向量是既有大小又有方向的量，本来就没有限制它必须在平面上，完全可以是空间中既有大小也有方向的量。对空间中任意两个用有向线段表示的向量，都可以将这两条有向线段平行移动到同一个平面中，看成同一个平面内的向量，来定义它们的加法和数量积，以及它们与实数的乘法。空间中向量运算也同样满足我们所熟悉的那些运算律。

因此，你现在就可以尝试利用向量的运算来解决空间图形的问题。只要不用坐标，你以前学过的知识已经足够了。

例 1 如图 3-1 所示，长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长 $|AB|=a$，$|AD|=b$，$|AA_1|=c$。求对角线 AC_1 的长度。

解 长方体的形状和位置完全由 $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{AA_1}$ 这三个基本的向量确定。设法将对角线向量 $\overrightarrow{AC_1}$ 用这三个基本向量表示出来：

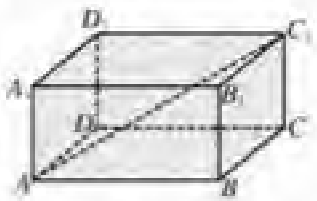


图 3-1

$$\overrightarrow{AC_1}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CC_1}$$
$$=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA_1}.$$

于是

$$|AC_1|^2=\overrightarrow{AC_1}^2=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA_1})^2$$
$$=\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AD}^2+\overrightarrow{AA_1}^2+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}+$$
$$2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AA_1}+2\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AA_1}.$$

由于，$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{AA_1}$ 两两相互垂直，两两相互的数量积为 0：

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AA_1}=\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AA_1}=0.$$

因此

向量的数量积运算律（如数量积对于加法的分配律）曾是一个问题，以前虽然有过证明，在空间中与在平面上是有区别的。但如果你愿意承认并可以用这些运算律解决问题而不追究它们的证明，空间与平面就没区别了。

$\overrightarrow{AC_1}$ 就是从 A 走到 C_1，具体到 C_1 "怎么走都不都是"，沿着长方体的棱前进，走出一条路线 $A\to B\to C\to C_1$，就将位移 $\overrightarrow{AC_1}$ 分解成了三个沿棱的位移 $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{CC_1}$ 之和。

$\overrightarrow{BC}$ 与 $\overrightarrow{AD}$ 方向相同，长度相等，因此 $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}$，同理 $\overrightarrow{CC_1}=\overrightarrow{AA_1}$。

任意三个向量的和的平方

$(a+b+c)^2$
$=(a+b)^2+c^2+2(a+b)\cdot c$
$=a^2+2a\cdot b+b^2+c^2+2a\cdot c+2b\cdot c.$

一般地，若干个向量之和的平方，等于这些向量的平方和加上每两个向量数量积的 2 倍。

想一想，若干个数之和的平方是否有类似的结果？

$$|AC_1|^2=|AB|^2+|AD|^2+|AA_1|^2=a^2+b^2+c^2,$$

$$|AC_1|=\sqrt{a^2+b^2+c^2}.$$

将例2与本套教材必修第二册4.6中例1相比较，你会发现，两个问题所求证的结论相同，所给的条件略有不同，第二册里的四边形ABCD是否在同一平面上，实际上我们默认它在同一平面上，利用向量的知识给出了一个解答。而在这里，放宽ABCD是空间四边形而不是平面四边形，但我们发现第二册中所给出的解答对空间四边形仍然完全适用，一个字都不需要改动。这说明，我们在第二章中所学的关于平面向量的运算的知识，实际上并不限于平面上的向量，对于空间中的向量也是适用的。

例2 设 $ABCD$ 是空间四边形，则

$$AC\perp BD\Leftrightarrow AB^2+CD^2=BC^2+DA^2.$$

解 从 A 出发的向量 $\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{AC}$、$\overrightarrow{AD}$ 确定了点 B，C，D 的位置，从而确定了整个图形，如图3-2. 因此，我们将涉及的所有的向量用这三个基本向量表示出来：

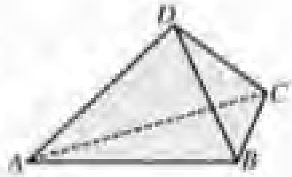


图3-2

$$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB},$$
$$\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC}.$$

注意到目标 $AB^2+CD^2=BC^2+DA^2$，即是 $AB^2+CD^2-BC^2-DA^2=0$. 我们先计算这个等式的左边：

$$\begin{aligned}
&AB^2+CD^2-BC^2-DA^2\\
&=\overrightarrow{AB}^2+(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC})^2-(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})^2-\overrightarrow{AD}^2\\
&=\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AD}^2+\overrightarrow{AC}^2-2\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AC}^2-\overrightarrow{AB}^2+\\
&\quad 2\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}^2\\
&=2\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}\\
&=2\overrightarrow{AC}\cdot(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD})\\
&=2\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB}.
\end{aligned}$$

因此，

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{DB}&\Leftrightarrow\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB}=0\\
&\Leftrightarrow AB^2+CD^2-BC^2-DA^2=0\\
&\Leftrightarrow AB^2+CD^2=BC^2+DA^2.
\end{aligned}$$

练 习

1. 如图3-3，已知一个60°的二面角 $\alpha-l-\beta$ 的棱长上有两个点 A，B，AC，BD 分别是在这两个面内且垂直于 AB 的线段，又知 $AB=3$，$AC=4$，$BD=5$，求 C，D 两点之间的距离.

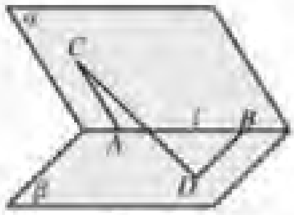


图3-3

3. 在四面体$ABCD$中，已知$AB\perp CD$，$AC\perp BD$，用向量的方法证明$AD\perp BC$.

习题1

学而时习之

1. 已知平行六面体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，以同一顶点为端点的三条棱长度均为1，且彼此的夹角都是$60°$，求AC_1的长.
2. 在四面体$ABCD$中，$BD=6$，E，F分别是$\triangle ABC$和$\triangle ACD$的重心，求EF的长.

温故而知新

3. 已知线段AB在平面α内，$AC\perp\alpha$，$BD\perp AB$，且BD与AC所成角为$60°$，求CD的长.（提示：考虑C，D与面α的位置关系.）

3.2 空间中向量的概念和运算

我们知道，空间图形与平面图形是很不相同的．一般来说，处理空间图形比处理平面图形更困难．比如，前面一节的两个例题，如果不用向量的方法，而用几何推理的方法来解，就都比平面几何的问题更困难．但是，当我们采用向量的方法来解决这些问题时，却发现以

前在处理平面图形时学过的向量的知识很自然就能用到空间图形上，不需要补充什么新的知识．这其中有什么奥妙？

让我们将以前学过的向量的概念和运算回顾一下，看它们是只限于平面上呢，还是本来就适用于空间中．

向量的概念：既有大小又有方向的量称为向量．

这既适用于平面上的向量，也适合于空间中的向量．二者的区别仅仅在于：在空间中比在平面上有更多的不同的方向．

用有向线段表示向量：要表示向量 $\boldsymbol{a}$，可以从任意一点 A 出发作有向线段 AB，使 AB 的方向与 $\boldsymbol{a}$ 相同，长度 $|AB|$ 等于 $\boldsymbol{a}$ 的模，则有向线段 AB 表示向量 $\boldsymbol{a}$，记为 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{AB}$．

这一表示法可以很自然地适用于空间的向量，不需要补充任何新知识．

注意：从不同点出发的不同的有向线段 AB、CD，只要方向和长度相同，所表示的向量就相等：$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$．

如图 3－4，对于空间任何两个向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$，可以从空间任意一点 O 出发作 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，即用同一平面内的两条有向线段 OA、OB 来表示 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$．这说明，空间中任何两个向量都可以看作同一平面内的向量．

即使是不在同一平面内的两条有向线段 OA、CD 表示的向量，也可以将 CD 平行移动到 OB，使 $\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{CD}$，将 $\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{CD}$ 看作同一平面内的向量 $\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OB}$．

反过来，同一平面内不平行的向量 a、b，一定可以用两条不在同一平面内的有向线段来表示．想一想为什么？

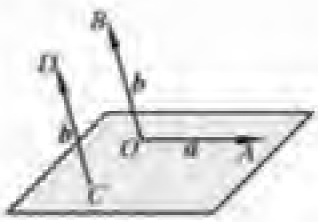


图 3－4

向量的加减法：空间任意两个向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 都可以看作同一平面内的向量，它们的加法与减法当然也都可以按照平面上的向量的加法和减法来进行，不需要补充任何新知识．具体做法如下：

如图 3－5，从任意一点 O 出发作 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，并且从 A 出发作 $\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{b}$，则 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\overrightarrow{OC}$，$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\overrightarrow{BA}$．

空间三个或更多的向量相加，不能同时将这些向量都用同一个平

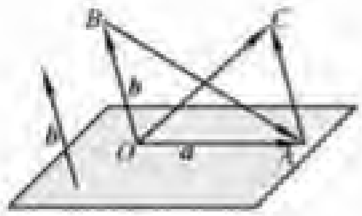


图 3－5

面上的有向线段来表示，但仍然可以将它们依次用首尾相接的有向线段来表示，得到它们的和．比如，三个向量的和

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}.$$

表示从 A 走到 B 再走到 C 再走到 D，总的效果是从 A 走到了 D（如图 3－6）．这个道理大家都懂，不需要作为新的知识来重新学习．

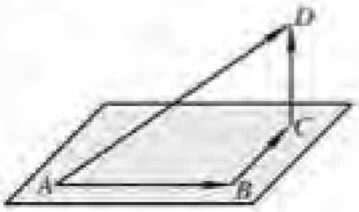


图 3－6

在地面上由 $A\to B\to C\to D$ 从 A 到 D 可以得到 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}$．在空中飞，依然如此．只要路径 $A\to B\to C\to D$ 从 A 到 D，同样都会得到 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}$．

空间向量的加法满足如下运算律：

1．$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$．（加法交换律）

2．$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$．（加法结合律）

两个向量相加，可以看作同一平面上的向量的加法，交换律已经成立，不需再证明．三个向量相加的结合律，可以采用与平面向量相同的方法证明．

向量与实数相乘：任何一个向量 $\boldsymbol{a}$ 都可以看作某个平面上的向量，它与实数 λ 相乘可以按照平面向量与实数相乘的法则进行．

空间向量与实数的乘法满足如下运算律：

1．$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$．（对向量加法的分配律）

2．$(\lambda_1+\lambda_2)\boldsymbol{a}=\lambda_1\boldsymbol{a}+\lambda_2\boldsymbol{b}$．（对实数加法的分配律）

自己画一画，如何由 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$ 作出表示 $\lambda\boldsymbol{a}$ 的有向线段．

向量的数量积：两个空间向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 可以看作同一平面上的向量，它们的数量积可以按照平面向量的数量积的法则进行．具体做法如下（图 3－7）：从空间任意一点 O 出发作 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$、$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，则 $\theta=\angle AOB$ 就是 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 所成的角，$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 的数量积 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$．

这两个运算律涉及的向量都可以看作同一平面的向量，运算律不需再证．

特别地，$\boldsymbol{a}^2=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|^2$，$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{\boldsymbol{a}^2}$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$．

空间向量的数量积满足如下运算律：

前面两个运算律所涉及的向量可以看作在同一平面内，是很不难证明。第三个运算律的证明有一定困难，需要具体分析，这里就略去了。你只要会应用它就行了。运算法则与平面的向量运算完全类似的。

1. $(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$.

2. $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$.

3. $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$.

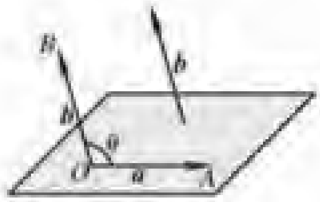


图 3－7

以上我们将平面上的向量的概念和运算很自然地推广到了空间中的向量．当我们计算空间一条线段的长度，或两条直线的夹角（包括两条直线的平行或垂直关系）时，只需要用到至多两个向量的运算，它们的运算都可以看作同一平面内的向量的运算，因此用以前的知识就可以解决，不需要补充什么新的知识．

例 如图 3－8，已知直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$\angle ACB=90°$，$\angle BAC=30°$，$|BC|=1$，$|AA_1|=\sqrt{6}$，M 是棱 CC_1 的中点．证明：$AB_1\perp A_1M$.

基本向量的线性组合，就是基本向量的倍向量之和．这里，$\overrightarrow{AB_1}$ 就表示成了三个基本向量的 -1 倍、1 倍、1 倍之和，而 $\overrightarrow{A_1M}$ 则是 -1 倍、0 倍、$-\frac{1}{2}$ 倍之和．

证明 直三棱柱的形状和位置完全由 $\overrightarrow{CA}$，$\overrightarrow{CB}$，$\overrightarrow{CC_1}$ 这三个基本的向量确定．设法将向量 $\overrightarrow{AB_1}$，$\overrightarrow{A_1M}$ 表示成这三个基本向量的线性组合．

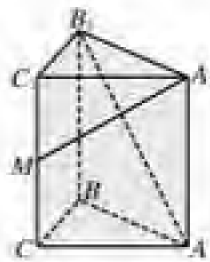


图 3－8

$$\overrightarrow{AB_1}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BB_1}$$
$$=-\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CC_1}.$$
$$\overrightarrow{A_1M}=\overrightarrow{A_1C_1}+\overrightarrow{C_1M}$$
$$=-\overrightarrow{CA}-\frac{1}{2}\overrightarrow{CC_1}.$$

于是

$$\overrightarrow{AB_1}\cdot\overrightarrow{A_1M}=(-\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CC_1})\cdot(-\overrightarrow{CA}-\frac{1}{2}\overrightarrow{CC_1})$$
$$=\overrightarrow{CA}^2-\frac{1}{2}\overrightarrow{CC_1}^2.$$

将 $-\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CC_1}$ 的每一项与 $-\overrightarrow{CA}-\frac{1}{2}\overrightarrow{CC_1}$ 的每一项分别相乘，注意到 $\overrightarrow{CA}$，$\overrightarrow{CB}$，$\overrightarrow{CC_1}$ 两两的数量积等于零，就只剩下 $\overrightarrow{CA}^2$，$-\frac{1}{2}\overrightarrow{CC_1}^2$ 这两项．

在 $Rt\triangle ACB$ 中求得 $|CA|=|BC|\cot 30°=\sqrt{3}$.

因此

$$\overrightarrow{AB_1}\cdot\overrightarrow{A_1M}=|CA|^2-\frac{1}{2}|CC_1|^2=\sqrt{3}^2-\frac{1}{2}(\sqrt{6})^2=0.$$

这就证明了

$$AB_1\perp A_1M.$$

练　习

1. 已知向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}|=3$, $|\boldsymbol{b}|=4$, $\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=30^\circ$, 求 $(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$ 的值.

2. 已知 E、F、G、H 分别是空间四边形 $ABCD$ 边 AB、BC、CD、DA 的中点, 用向量法证明：(1) E、F、G、H 四点共面；(2) $BD\parallel$ 面 $EFGH$.

习题 2

学而时习之

1. 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 下列各式中运算的结果为向量 $\overrightarrow{AC_1}$ 的共有 (　　)

(1) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CC_1}$；

(2) $\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{A_1D_1}+\overrightarrow{D_1C_1}$；

(3) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{B_1C_1}$；

(4) $\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{A_1B_1}+\overrightarrow{B_1C_1}$.

(A) 1个　　(B) 2个　　(C) 3个　　(D) 4个

2. 已知空间四边形 $ABCD$ 的边长和对角线长都为 2, 点 E, F, G 分别为 AB, AD, DC 的中点, 求下列数量积：

(1) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$；　(2) $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BD}$；　(3) $\overrightarrow{GF}\cdot\overrightarrow{AC}$；　(4) $\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{BC}$.

温故而知新

3. 在平行四边形 $ABCD$ 所在的平面外一点 O 作向量 $\overrightarrow{OE}=3\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OF}=3\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OG}=3\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OH}=3\overrightarrow{OD}$, 求证：

(1) 四点 E, F, G, H 共面；

(2) 平面 $AC\parallel$ 平面 EG.

3.3 空间向量的坐标

一、空间向量的分解与坐标

我们知道，平面上的向量可以用坐标表示，表示的方法是：在平面内取两个相互垂直的单位向量 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 作为基，则平面内的每个向量 $\boldsymbol{v}$ 都可以唯一地写成 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 的线性组合

$$\boldsymbol{v}=x\boldsymbol{e}_1+y\boldsymbol{e}_2,$$

其中的两个系数组成的有序数组 (x,y) 就称为向量 $\boldsymbol{v}$ 在这组基下的坐标．向量的运算都可以通过坐标的运算来实现．

(x,y) 可以认为是用 $\boldsymbol{e}_1$、$\boldsymbol{e}_2$ 这两把"尺子""度量"$\boldsymbol{v}$ 得到的读数．比如 $\boldsymbol{e}_1$ 表示向东 1 m，$\boldsymbol{e}_2$ 表示向北 1 m，(x,y) 就表示向东 x m，向北 y m．

在空间中，两个向量的线性组合不能将所有的向量都表示出来．但是，取三个两两垂直的单位向量 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{e}_3$ 组成基，就可以将空间中每个向量 $\boldsymbol{v}$ 都写成这三个向量的线性组合的形式

$$\boldsymbol{v}=x\boldsymbol{e}_1+y\boldsymbol{e}_2+z\boldsymbol{e}_3,$$

其中三个系数组成有序数组 (x,y,z) 用来表示向量 $\boldsymbol{v}$，作为 $\boldsymbol{v}$ 的坐标．

平面上用两把"尺子"就可以度量所有的向量．空间中要三把"尺子"才够．比如，$\boldsymbol{e}_1$、$\boldsymbol{e}_2$、$\boldsymbol{e}_3$ 分别表示向东、向北、向上移动 1 m，则 (x,y,z) 就表示向东 x m，向北 y m，向上 z m．

我们重新来看 3.1 中的例子，看能否自己建立坐标，并通过坐标的运算来解决．

例 1 长方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 的棱长 $|AB|=a$，$|AD|=b$，$|AA_1|=c$，如图 3-9．求对角线 AC_1 的长度．

解 取 $\overrightarrow{AB}$ 方向上的单位向量 $\boldsymbol{e}_1$，$\overrightarrow{AD}$ 方向上的单位向量 $\boldsymbol{e}_2$，$\overrightarrow{AA_1}$ 方向上的单位向量 $\boldsymbol{e}_3$，则 $\overrightarrow{AB}=a\boldsymbol{e}_1$，$\overrightarrow{AD}=b\boldsymbol{e}_2$，$\overrightarrow{AA_1}=c\boldsymbol{e}_3$．

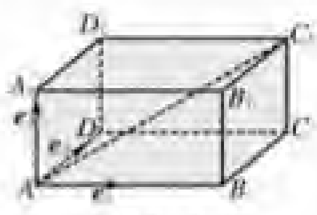


图 3-9

$$\overrightarrow{AC_1}=a\boldsymbol{e}_1+b\boldsymbol{e}_2+c\boldsymbol{e}_3,$$

$$|AC_1|^2=\overrightarrow{AC_1}^2=(a\boldsymbol{e}_1+b\boldsymbol{e}_2+c\boldsymbol{e}_3)^2$$

$$=a^2\boldsymbol{e}_1^2+b^2\boldsymbol{e}_2^2+c^2\boldsymbol{e}_3^2=a^2+b^2+c^2,$$

$$|AC_1|=\sqrt{a^2+b^2+c^2}.$$

若你有兴趣，还可以尝试建立坐标来解决 3.1 中的例．

在这个例子中，向量 $\overrightarrow{AC_1}$ 被写成了两两相互垂直的单位向量 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{e}_3$ 的线性组合 $a\boldsymbol{e}_1+b\boldsymbol{e}_2+c\boldsymbol{e}_3$．我们可以将这个表达式中的系数

(a, b, c) 称为$\overrightarrow{AC_1}$的坐标. $\overrightarrow{AC_1}$与自己的数量积归结为坐标(a, b, c)的运算.

一般地，我们有

定理 1 设 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{e}_3$ 是空间中三个两两垂直的单位向量，则

(1) 空间中任意一个向量 $\boldsymbol{v}$ 可以写成这三个向量的线性组合：

$$\boldsymbol{v}=x\boldsymbol{e}_1+y\boldsymbol{e}_2+z\boldsymbol{e}_3.$$

(2) 上述表达式中的系数 x，y，z 由 $\boldsymbol{v}$ 唯一决定，即：

如果 $\boldsymbol{v}=x\boldsymbol{e}_1+y\boldsymbol{e}_2+z\boldsymbol{e}_3=x'\boldsymbol{e}_1+y'\boldsymbol{e}_2+z'\boldsymbol{e}_3$，则 $x=x'$，$y=y'$，$z=z'$.

这个定理的证明不必追求严格，但定理的结论应当熟悉并熟练应用.

证明 (1) 任取空间一点 O，作$\overrightarrow{OE_1}=\boldsymbol{e}_1$，$\overrightarrow{OE_2}=\boldsymbol{e}_2$，$\overrightarrow{OE_3}=\boldsymbol{e}_3$，$\overrightarrow{OP}=\boldsymbol{v}$.

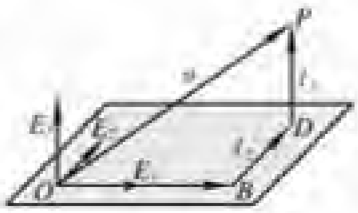


图 3-10

如图 3-10，过 P 作直线 l_1 与 OE_3 平行或重合，l_1 与平面 OE_1E_2 相交于 D.

在平面 OE_1E_2 内过 D 作直线 l_2 与 OE_2 平行或重合，l_2 与直线 OE_1 相交于 B.

则 $v=\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DP}$.

有向线段 OB 在直线 OE_1 上，故$\overrightarrow{OB}=x\overrightarrow{OE_1}=x\boldsymbol{e}_1$，$x$ 是某个实数.

有向线段 BD 所在直线 l_2 与直线 OE_2 平行或重合，故$\overrightarrow{BD}=y\overrightarrow{OE_2}=y\boldsymbol{e}_2$，$y$ 是某个实数.

有向线段 DP 所在直线 l_1 与直线 OE_3 平行或重合，故$\overrightarrow{DP}=z\overrightarrow{OE_3}=z\boldsymbol{e}_3$，$z$ 是某个实数.

于是 $\boldsymbol{v}=x\boldsymbol{e}_1+y\boldsymbol{e}_2+z\boldsymbol{e}_3$.

(2) 设 $x\boldsymbol{e}_1+y\boldsymbol{e}_2+z\boldsymbol{e}_3=x'\boldsymbol{e}_1+y'\boldsymbol{e}_2+z'\boldsymbol{e}_3$，

则$(x-x')\boldsymbol{e}_1+(y-y')\boldsymbol{e}_2+(z-z')\boldsymbol{e}_3=0$.

如果 $z-z'\neq 0$，则

$$\overrightarrow{OE_3}=\boldsymbol{e}_3=\frac{x-x'}{z-z'}\boldsymbol{e}_1+\frac{y-y'}{z-z'}\boldsymbol{e}_2$$

$$=\frac{x-x'}{z-z'}\overrightarrow{OE_1}+\frac{y-y'}{z-z'}\overrightarrow{OE_2}.$$

这导致 OE_3 在平面 OE_1E_2 内. 但平面 OE_1E_2 不可能有三条两两相互垂直的非零线段 OE_1, OE_2, OE_3. 这个矛盾说明了只能 $z-z'=0$, $z=z'$. 于是 $(x-x')\boldsymbol{e}_1+(y-y')\boldsymbol{e}_2=0$.

如果 $y-y'\neq 0$, 则 $\overrightarrow{OE_2}=\boldsymbol{e}_2=-\frac{x-x'}{y-y'}\boldsymbol{e}_1=-\frac{x-x'}{y-y'}\overrightarrow{OE_1}$. 这导致 OE_1, OE_2 共线. 但这与 $OE_1\perp OE_2$ 矛盾. 这说明 $y-y'=0$, 从而 $y=y'$. 于是 $(x-x')\boldsymbol{e}_1=0$. 由 $\boldsymbol{e}_1\neq 0$ 知 $x-x'=0$, $x=x'$.

平面上的坐标由两个数组成，空间中的坐标由三个数组成，这是平面与空间的最大区别。但是，空间向量运算的坐标公式与平面向量的相应的公式却是非常类似的，请自行验证。

上述定理中所说的两两垂直的单位向量 $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ 组成空间的一组基. 将空间的向量 $\boldsymbol{v}$ 写成 $\boldsymbol{v}=x\boldsymbol{e}_1+y\boldsymbol{e}_2+z\boldsymbol{e}_3$ 的形式之后，表达式中的系数组成的有序数组 (x,y,z) 称为 $\boldsymbol{v}$ 在这组基下的坐标. 坐标 (x,y,z) 可以表示向量 $\boldsymbol{v}$, 向量的运算可以归结为坐标的运算. 可以直接用等式 $\boldsymbol{v}=(x,y,z)$ 来表明向量 $\boldsymbol{v}$ 的坐标是 (x,y,z).

这里，"三个不共面的向量 $\boldsymbol{e}_1$、$\boldsymbol{e}_2$、$\boldsymbol{e}_3$"的意思是，如果从同一点 O 出发作有向线段 OA、OB、OC 分别表示 $\boldsymbol{e}_1$、$\boldsymbol{e}_2$、$\boldsymbol{e}_3$，则 O、A、B、C 不在同一个平面内。

在定理 1 的条件中将 $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ 改为任意三个不共面的向量. 仔细检验可以发现，定理 1 证明的每一个步骤仍然能通过，或者稍加修改就能通过，从而得出如下结论：

定理 2 （空间向量基本定理）设 $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ 是空间中三个不共面的单位向量. 则

(1) 空间中任意一个向量 $\boldsymbol{v}$ 可以写成这三个向量的线性组合：

$$\boldsymbol{v}=x\boldsymbol{e}_1+y\boldsymbol{e}_2+z\boldsymbol{e}_3.$$

(2) 上述表达式中的系数 x, y, z 由 $\boldsymbol{v}$ 唯一决定. 即：

如果 $\boldsymbol{v}=x\boldsymbol{e}_1+y\boldsymbol{e}_2+z\boldsymbol{e}_3=x'\boldsymbol{e}_1+y'\boldsymbol{e}_2+z'\boldsymbol{e}_3$, 则 $x=x'$, $y=y'$, $z=z'$.

比如，第 3.1 节例 7 中我们就将所证结论的向量都表示成三个不共面的基本向量 $\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{AC}$、$\overrightarrow{AD}$ 的线性组合。

虽然任意三个不共面的向量都可以取作基向量来建立坐标，但是，我们通常还是取两两垂直的单位向量作为基建立坐标，这样可以使坐标运算公式最简单.

二、空间向量运算的坐标公式

设在空间取定了三个两两垂直的单位向量 $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ 组成一组基. 将空间中每个向量 $\boldsymbol{v}$ 用它的坐标 (x,y,z) 来表示. 则

1. 向量的加减法：

$$(x_1, y_1, z_1)+(x_2, y_2, z_2)=(x_1+x_2, y_1+y_2, z_1+z_2)$$
$$(x_1, y_1, z_1)-(x_2, y_2, z_2)=(x_1-x_2, y_1-y_2, z_1-z_2)$$

2. 向量与实数的乘法：

$$a(x, y, z)=(ax,\ ay,\ az)$$

3. 向量的数量积：

$$(x_1, y_1, z_1)\cdot(x_2, y_2, z_2)=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$$

将平面向量运算的坐标公式中的两个坐标换成三个坐标，就得到空间向量运算的坐标公式.

以上公式与平面上向量的相应公式是类似的，很容易记忆和应用.

证明方法也是类似的. 我们只对向量的数量积的坐标公式作一个证明，其余公式的证明就略去了.

由向量的坐标计算数量积的公式的证明：

设 $\boldsymbol{v}_1=(x_1, y_1, z_1)$，$\boldsymbol{v}_2=(x_2, y_2, z_2)$，则

$$\boldsymbol{v}_1=x_1\boldsymbol{e}_1+y_1\boldsymbol{e}_2+z_1\boldsymbol{e}_3,$$
$$\boldsymbol{v}_2=x_2\boldsymbol{e}_1+y_2\boldsymbol{e}_2+z_2\boldsymbol{e}_3,$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v}_1\cdot\boldsymbol{v}_2&=(x_1\boldsymbol{e}_1+y_1\boldsymbol{e}_2+z_1\boldsymbol{e}_3)\cdot(x_2\boldsymbol{e}_1+y_2\boldsymbol{e}_2+z_2\boldsymbol{e}_3)\\&=x_1x_2\boldsymbol{e}_1^2+x_1y_2\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2+x_1z_2\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_3+\\&\quad y_1x_2\boldsymbol{e}_2\cdot\boldsymbol{e}_1+y_1y_2\boldsymbol{e}_2^2+y_1z_2\boldsymbol{e}_2\cdot\boldsymbol{e}_3+\\&\quad z_1x_2\boldsymbol{e}_3\cdot\boldsymbol{e}_1+z_1y_2\boldsymbol{e}_3\cdot\boldsymbol{e}_2+z_1z_2\boldsymbol{e}_3^2\\&=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2.\end{aligned}$$

将数量积的多项式展开，一共有9项，但由于 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{e}_3$ 相互的数量积等于0，自己与自己的数量积等于1，最后就只剩下 x_1x_2，y_1y_2，z_1z_2 三项.

例 2　(1) 求向量 $\boldsymbol{v}=(x, y, z)$ 的模 $|\boldsymbol{v}|$；

(2) 求两个非零向量 $\boldsymbol{v}_1=(x_1, y_1, z_1)$，$\boldsymbol{v}_2=(x_2, y_2, z_2)$ 的夹角 α 的余弦.

解　(1) 由向量的数量积公式知道 $\boldsymbol{v}^2=(x, y, z)\cdot(x, y, z)=x^2+y^2+z^2$，从而

$$|\boldsymbol{v}|=\sqrt{\boldsymbol{v}^2}=\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

(2) 由向量数量积的定义 $\boldsymbol{v}_1\cdot\boldsymbol{v}_2=|\boldsymbol{v}_1||\boldsymbol{v}_2|\cos\alpha$ 得

$$\cos\alpha=\frac{\boldsymbol{v}_1\cdot\boldsymbol{v}_2}{|\boldsymbol{v}_1||\boldsymbol{v}_2|}=\frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}.$$

根据所求得的 $\cos\alpha$ 的值，可以在 $[0,\pi]$ 的范围内求出唯一的 α。

例 2 的结论可以作为公式来使用.

求向量 $\boldsymbol{v}=(x,y,z)$ 的模的公式：

$$|\boldsymbol{v}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

求向量 (x_1,y_1,z_1)，(x_2,y_2,z_2) 所成的角 α 的公式：

$$\cos\alpha=\frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}$$

多知道一点

柯西不等式

任取六个实数值 x_1，y_1，z_1，x_2，y_2，z_2，以它们为坐标可以造出两个向量 $\boldsymbol{v}_1=(x_1,y_1,z_1)$，$\boldsymbol{v}_2=(x_2,y_2,z_2)$. 当这两个向量都不为零时可以按照上述公式计算出它们的夹角 α 的余弦. 由 $\cos^2\alpha\leqslant 1$ 可以得出不等式

$$\cos^2\alpha=\frac{(x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2)^2}{(x_1^2+y_1^2+z_1^2)(x_2^2+y_2^2+z_2^2)}\leqslant 1.$$

即

$$(x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2)^2\leqslant(x_1^2+y_1^2+z_1^2)(x_2^2+y_2^2+z_2^2).$$

这个不等式称为柯西不等式. 其中的等号成立的条件是 $\cos^2\alpha=1$，即 $\alpha=0$ 或 π，也就是说向量 $\boldsymbol{v}_1$ 与 $\boldsymbol{v}_2$ 平行，坐标 (x_1,y_1,z_1) 与 (x_2,y_2,z_2) 成比例，其中一个是另一个的实数倍.

容易验证，柯西不等式当 $\boldsymbol{v}_1=0$（即 $x_1=y_1=z_1$）或 $\boldsymbol{v}_2=0$（即 $x_2=y_2=z_2=0$）时显然也成立. 事实上，此时不等式中的等号成立，而此时其中的零向量是另一个向量的 0 倍.

说明：柯西不等式可以推广到对任意 $2n$ 个实数 a_1，a_2，…，a_n，b_1，b_2，…，b_n 都成立，请一般地叙述推广了的不等式. 对于 $n>3$ 的情形，不能通过几何的方式借助 n 维空间来证明，而要通过代数的途径来证明.

因此，柯西不等式对任意六个实数 x_1，y_1，z_1，x_2，y_2，z_2 均成立，其中的等号成立的充分必要条件是：(x_1,y_1,z_1) 与 (x_2,y_2,z_2) 中的一个是另一个的实数倍.

三、点的坐标与向量坐标

在空间中任意取定一点 O（称为原点），则每个点 P 对应于唯一一个向量 $\overrightarrow{OP}$. 反过来，每个向量 $\boldsymbol{v}$ 对应于唯一的一个点 P 使 $\boldsymbol{v}=\overrightarrow{OP}$. 在原点 O 确定之后，向量 $\overrightarrow{OP}$ 唯一地确定了点 P 的位置，称为点 P 的位置向量.

如果再取三个两两垂直的单位向量 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{e}_3$，组成一组基，则每个点 P 的位置向量 $\overrightarrow{OP}$ 有唯一的坐标 (x,y,z) 使 $\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{e}_1+y\boldsymbol{e}_2+z\boldsymbol{e}_3$. 这个坐标 (x,y,z) 唯一地表示了向量 $\overrightarrow{OP}$，从而也唯一地表示了点 P.

以 O 为原点，分别以 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{e}_3$ 的方向为 x 轴、y 轴、z 轴的正方向，以 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{e}_3$ 共同的长度为单位长，建立空间直角坐标系，则点 P 在此坐标系下的坐标就是向量 $\overrightarrow{OP}$ 的坐标 (x,y,z).

反过来，假如空间中已经建立了直角坐标系，以 O 为原点. 点在此坐标系下的坐标为 (x,y,z). 分别取 x 轴、y 轴、z 轴的方向上的单位向量 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{e}_3$ 组成一组基，则向量 $\overrightarrow{OP}$ 在这组基下的坐标就等于点 P 在这个坐标系下的坐标 (x,y,z).

我们约定：如果在空间建立了直角坐标系，当我们说到向量的坐标的时候，总是分别取 x 轴、y 轴、z 轴的方向上的单位向量 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{e}_3$ 组成一组基，在这组基下来写每个向量的坐标.

将点 P 的坐标与它的位置向量 $\overrightarrow{OP}$ 的坐标联系起来，就可以利用坐标的运算处理空间图形的问题.

例 3 如图 3－11，在空间中建立了直角坐标系. 设两点 A，B 的坐标分别是 (x_1,y_1,z_1)，(x_2,y_2,z_2).

（1）求向量 $\overrightarrow{AB}$ 的坐标；

(2) 求两点 A，B 之间的距离；

(3) 求线段 AB 中点 M 的坐标.

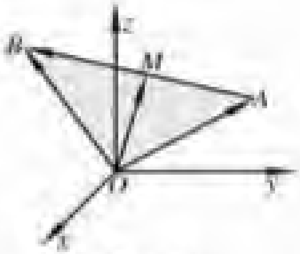


图 3-11

解 (1) A，B 的坐标 (x_1, y_1, z_1)，(x_2, y_2, z_2) 分别是向量 $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$ 的坐标. 因此

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1)$.

(2) $|AB|=|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$.

(3) 点 M 的坐标就是 $\overrightarrow{OM}$ 的坐标. 在平面 OAB 内有 $\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})$. 故

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM}&=\frac{1}{2}((x_1, y_1, z_1)+(x_2, y_2, z_2))\\&=\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}, \frac{z_1+z_2}{2}\right).\end{aligned}$$

例 3 得出的结论可以当作公式和法则来使用：

(1) 一个向量在直角坐标系中的坐标等于表示这个向量的有向线段的终点的坐标减去起点的坐标.

(2) 两点 $A(x_1, y_1, z_1)$，$B(x_2, y_2, z_2)$ 的距离

$$d_{AB}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

(3) 线段的中点坐标，等于线段两端点坐标的平均值.

例 4 已知直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$\angle ACB=90°$，$\angle BAC=30°$，$|BC|=1$，$|AA_1|=\sqrt{6}$，M 是棱 CC_1 的中点，如图 3-12. 证明：$AB_1\perp A_1M$.

证明 在直角三角形 ACB 中有 $|CB|=1$，$|CA|=\cot 30°=\sqrt{3}$.

以 C 为原点，CA，CB，CC_1 的方向分别为 x 轴、y 轴、z 轴的正方向建立空间直角坐标系.

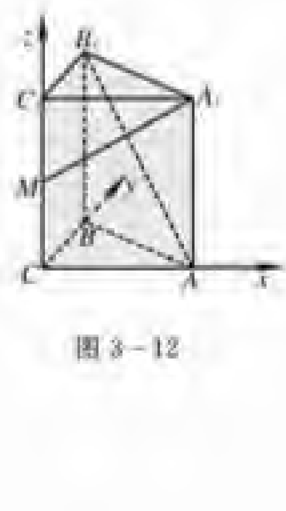


图 3-12

相关各点的坐标分别为 $A(\sqrt{3}, 0, 0)$，

$B_1(0,1,\sqrt{6})$，$A_1(\sqrt{3},0,\sqrt{6})$，$M\left(0,0,\frac{1}{2}\sqrt{6}\right)$.

于是

$\overrightarrow{AB_1}=(0-\sqrt{3},1-0,\sqrt{6}-0)=(-\sqrt{3},1,\sqrt{6})$，

$\overrightarrow{A_1M}=\left(0-\sqrt{3},0-0,\frac{1}{2}\sqrt{6}-\sqrt{6}\right)=\left(-\sqrt{3},0,-\frac{1}{2}\sqrt{6}\right)$.

$\overrightarrow{AB_1}\cdot\overrightarrow{A_1M}=(-\sqrt{3})(-\sqrt{3})+1\times 0+\sqrt{6}\times\left(-\frac{1}{2}\sqrt{6}\right)=0$.

故 $AB_1 \perp A_1M$.

这是3.2中的例 在3.2中有向量的运算来解答，这里再利用坐标运算解答一次，两个解答实质上是相同的，坐标运算其实就是向量运算的坐标表示的叙述。

练 习

1. 设命题 p：$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 是三个非零向量；命题 q：$\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\}$ 为空间的一组基，则命题 p 是命题 q 的（　　）

   (A) 充分非必要条件　(B) 必要非充分条件

   (C) 充要条件　(D) 既非充分又非必要条件

2. 如图 3-13 所示，已知空间四边形 $OABC$，其对角线为 OB、AC，M 是边 OA 的中点，G 是 $\triangle ABC$ 的重心，则用基向量 $\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OB}$、$\overrightarrow{OC}$ 表示向量 $\overrightarrow{MG}$ 的表达式为________.

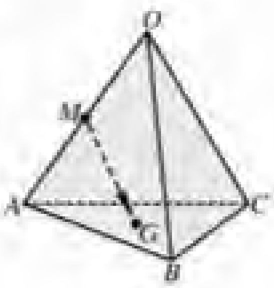


图 3-13

3. 向量 $\boldsymbol{a}=(2,-1,2)$，向量 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 共线，且 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x}=-18$，求 $\boldsymbol{x}$.

4. 已知空间三点 $A(-4,0,4)$，$B(-2,2,4)$，$C(-3,2,3)$，设 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{AB}$，$\boldsymbol{b}=\overrightarrow{BC}$.

   (1) 求 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角；

   (2) 若向量 $k\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $k\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$ 互相垂直，求实数 k 值.

5. 在棱长为 a 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E、F 分别是棱 AB、BC 上的动点，且 $AE=BF$. 求证：$A_1F \perp C_1E$.

习题 3

学而时习之

1. 若 O，A，B，C 为空间四点，且向量 $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$ 构成空间的一组基，那么（　　）

   (A) O，A，B，C 四点不共线　　(B) O，A，B，C 四点共面，但不共线

   (C) O，A，B，C 四点不共面　　(D) O，A，B，C 四点中任三点不共线

2. 空间四边形 $OABC$，$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}$，点 M 在 OA 上，且 $OM=2MA$，N 为 BC 中点，则 $\overrightarrow{MN}=$__________（用 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 表示）.

3. 已知 $A(1,\ -2,\ 11)$，$B(4,\ 2,\ 3)$，$C(6,\ -1,\ 4)$，求 $\triangle ABC$ 面积.

4. 已知 M，N，P 分别是正方体 AC_1 的棱 CC_1，BC_1，CD 的中点．求证：$A_1P\perp$ 面 DMN.

温故而知新

5. 若 A，B 两点的坐标分别为 $A(\cos\alpha,\ \sin\alpha,\ 3)$，$B(2\cos\theta,\ 2\sin\theta,\ 1)$，求 $|\overrightarrow{AB}|$ 的取值范围.

6. 已知 $\boldsymbol{a}=(2,\ 3,\ 1)$，$\boldsymbol{b}=(5,\ 6,\ 4)$．试求：(1) 以 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 为相邻两边的平行四边形的面积；(2) 此平行四边形的两条高的长.

7. 已知 $\boldsymbol{F}_1=(1,\ 2,\ 3)$，$\boldsymbol{F}_2=(-2,\ 3,\ -1)$，$\boldsymbol{F}_3=(3,\ -1,\ 5)$，若三个力 $\boldsymbol{F}_1$，$\boldsymbol{F}_2$，$\boldsymbol{F}_3$ 共同作用于一物体上，使物体从点 $A(1,\ -2,\ 1)$ 移到点 $B(3,\ 1,\ 2)$，则合力 $\boldsymbol{F}$ 所做的功是________.

3.4 直线的方向向量

在处理空间图形的时候，经常需要考虑两条直线所成的角，考虑

两条直线的平行和垂直关系．直线的平行和垂直是两条直线成特殊角的情形：垂直是两条直线成直角的情形，平行是两条直线不重合且成 $0°$ 角的情形．

两条直线所成的角，只与两条直线的方向有关，与直线所处的位置没有关系．

直线的方向可以用向量来表示：在直线 l 上任取两个不同的点 A，B，则有向线段 AB 所代表的向量 $\overrightarrow{AB}$ 就表示直线的方向．称 $\overrightarrow{AB}$ 为直线 l 的方向向量．当然，$\overrightarrow{BA}$ 也是直线 l 的方向向量．

如果 $v=\overrightarrow{CD}$，$CD\parallel l$，从直线 l 上任取一点 A 而来作 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$，则 A、B 都在 l 上．所以，说 v 与 l 平行，实际上就总是可以选取 $\overrightarrow{AB}=v$ 使 AB 在 l 上．

一般地，如果向量 $v\neq 0$ 与直线 l 平行，就称 v 为 l 的方向向量．

两条直线垂直⇔它们的方向向量垂直．比如在本章 3.1 例 2 中，直线 AC，BD 的垂直用它们的方向向量 $\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{BD}$ 之间的垂直来描述，从而可以用向量数量积的等式 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=0$ 来描述．3.2 例中也是这样．

要证明两条直线平行，只要证明这两条直线不重合，并且它们的方向向量 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{CD}$ 平行，也就是证明其中一个方向向量是另一个方向向量的实数倍：$\overrightarrow{CD}=k\overrightarrow{AB}$（$k$ 是某个实数）．

要求两条直线 AB，CD 所成的角 α，只要先计算它们的方向向量 $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{CD}$ 所成的角 α_1．如果 $0\leqslant\alpha_1\leqslant\frac{\pi}{2}$，则 $\alpha=\alpha_1$．否则 $\frac{\pi}{2}<\alpha_1\leqslant\pi$，此时 $\alpha=\pi-\alpha_1$．角 α_1 可以通过计算 $\cos\alpha_1$ 来得到：

$$\cos\alpha_1=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{CD}|},$$

而不论 α_1 是否大于直角，都可由

$$\cos\alpha=|\cos\alpha_1|=\frac{|\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}|}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{CD}|}$$

得出 α．

例 1　已知单位正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$，点 E，F 分别是棱 B_1C_1 和 C_1D_1 的中点，如图 3－14．求 AD_1 与 EF 所成的角．

解　以 A 为原点，AB，AD，AA_1 分别为 x 轴、y 轴、z 轴的正方向建立空间直角坐标系，则相关的点的坐标为 $D_1(0,1,1)$，$B_1(1,0,1)$，$C_1(1,1,1)$，$E\left(1,\frac{1}{2},1\right)$，$F\left(\frac{1}{2},1,1\right)$．

$\overrightarrow{AD_1}=(0,1,1)$，$\overrightarrow{EF}=\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right)$.

设直线 AD_1，EF 所成的角为 α，它们的方向向量 $\overrightarrow{AD_1}$，$\overrightarrow{EF}$ 的夹角为 α_1，则

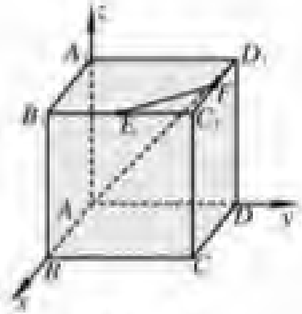


图 3－14

$$\cos\alpha=|\cos\alpha_1|=\frac{|\overrightarrow{AD_1}\cdot\overrightarrow{EF}|}{|AD_1|\cdot|EF|}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{1^2+1^2}\cdot\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}}$$

$$=\frac{1}{2}.$$

这说明直线 AD_1，EF 所成的角 $\alpha=\frac{\pi}{3}$.

例 2 若一非平面四边形对边长相等，证明两对角线中点连线垂直于两对角线.

证明 设 $ABCD$ 为不在同一平面内的四边形，$|AB|=|CD|$，$|BC|=|DA|$，M 是对角线 AC 的中点，N 是对角线 BD 的中点，如图 3－15. 需要证明 $MN\perp AC$ 且 $MN\perp BD$.

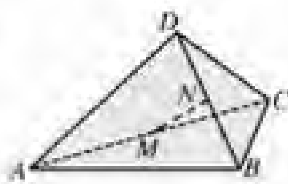


图 3－15

四边形的四个顶点的相对位置由三个基本向量 $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{AD}$ 决定. 先将相关的线段都用这三个基本向量的线性组合表示出来.

第一个问题都可以尝试从这一步开始.

$$\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}.$$

$$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}.$$

$$\begin{aligned}|AB|=|CD|\Leftrightarrow 0&=\overrightarrow{CD}^2-\overrightarrow{AB}^2\\&=(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC})^2-\overrightarrow{AB}^2\\&=\overrightarrow{AD}^2-2\,\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AC}^2-\overrightarrow{AB}^2.\end{aligned}\qquad①$$

同理

$$|BC|=|DA|\Leftrightarrow 0=\overrightarrow{AB}^2-2\,\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AC}^2-\overrightarrow{AD}^2.\qquad②$$

而

$$\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AC}$$

$$=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AC}^2). \qquad ③$$

由②得 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AC}^2-\overrightarrow{AD}^2)$.

由①得 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}^2+\overrightarrow{AC}^2-\overrightarrow{AB}^2)$.

故 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AC}^2$

代入③得

$$\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}^2-\overrightarrow{AC}^2)=0$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{MN}\perp\overrightarrow{AC}\Rightarrow \text{直线 } MN\perp \text{直线 } AC.$$

同理可知 $MN\perp BD$.

练习

1. 如果平面的一条斜线和它在这个平面上的射影的方向向量分别为 $\boldsymbol{a}=(1, 0, 1)$，$\boldsymbol{b}=(0, 1, 1)$，则这条斜线与平面所成的角为（　　）

   (A) 90°　　(B) 60°　　(C) 45°　　(D) 30°

2. 已知长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=3$，$AD=4$，$BC=5$，求异面直线 DA_1 与 AC 所成角的余弦值.

习题 4

学而时习之

1. 已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1，E、F、G 分别是 DD_1、BD、BB_1 的中点.（1）求证：$EF\perp CF$；（2）求 EF 与 CG 所成角的余弦.
2. 已知直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$CA=CB=1$，$\angle BCA=90^\circ$，$AA_1=2$，M、N

分别为 A_1B_1，A_1A 的中点. (1) 求 BN 的长；(2) 求异面直线 BA_1 与 CB_1 所成角的余弦；(3) 求证：$A_1B\perp C_1M$.

温故而知新

5. 已知正四棱锥 $V-ABCD$ 底面中心为 O，E，F 分别为 VA，VC 的中点，底面边长为 2，高为 4. 建立适当的空间直角坐标系，求异面直线 BE 与 DF 所成角的正切值.

3.5 直线与平面的垂直关系

在必修第三册第 6 章中，我们已经学习了直线与平面垂直的一些基本知识.

直线与平面的垂直，是通过直线与直线的垂直来定义的：

如果一条直线 l 与一个平面 α 相交，并且垂直于平面 α 内所有的直线，就称直线 l 与平面 α 垂直，记作 $l\perp\alpha$.

向量是处理直线与直线垂直的强有力的工具，很自然也是处理直线与平面垂直的强有力工具.

首先来看：

在必修第三册中，我们通过探索和实验认识了这个定理，但并没有给出一个数学证明.

定理（直线与平面垂直的判定定理）如果一条直线垂直于一个平面内两条相交直线，那么这条直线就与这个平面垂直.

利用向量的运算可以很容易对这个定理给出一个证明：

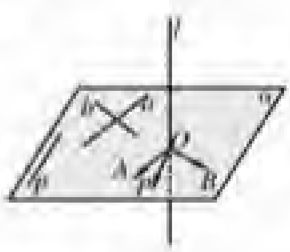


图 3-16

设 a，b 是平面 α 内两条相交直线，直线 l 与平面 α 交于点 O，且 $l\perp a$，$l\perp b$，如图 3-16. 求证：$l\perp\alpha$.

证明 根据直线与平面垂直的定义，要证明 $l\perp\alpha$，只需要证明：对于平面 α 内任意一条直线 p，$l\perp p$.

从点 O 出发在平面 α 内作不等于零的有向线段 OA，OB，OP，分别表示直线 a，b，p 的方向向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{p}$.

由 a，b 相交知 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 是平面 α 内不平行的向量. 根据平面向量基本定理，平面 α 内的向量 $\boldsymbol{p}$ 可以写成 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的线性组合：

$$\boldsymbol{p}=x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}.$$

其中 x，y 是某两个实数.

任取直线 l 的方向向量 $\boldsymbol{c}$，则由 $l\perp a$，$l\perp b$ 知

$$\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}=0,\ \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b}=0.$$

[illegible] $\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}=0$，$\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b}=0\Rightarrow\boldsymbol{c}\cdot(x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b})=0$，就这么简单！

从而

$$\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{p}=\boldsymbol{c}\cdot(x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b})=x\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b}=x0+y0=0.$$

这说明 $\boldsymbol{c}\perp\boldsymbol{p}$，从而 $l\perp p$.

由于 p 是平面 α 内任意直线，就得到 $l\perp\alpha$.

过空间任意一点 P 作平面 α 的垂线与 α 相交于点 P_0，则 P_0 称为点 P 在平面 α 内的射影.

就好比是阳光垂直照射到平面 α 上，将点 P 在平面 α 上投下一个影子 P_0.

预先给定平面 α，空间任何一个图形的每一个点 P 在平面 α 上都有一个射影 P_0，所有这些 P_0 在平面 α 上组成一个图形，称为这个空间图形在平面 α 上的射影.

直线 l 在平面 α 上的射影是什么图形？

容易看出，如果直线 l 垂直于平面 α，那么 l 在 α 上的射影是一个点，就是 l 与 α 的交点. 如果 l 与 α 不垂直，l 在 α 上的射影就是一条直线.

与平面 α 相交而不垂直的直线 l 称为平面 α 的斜线. 关于平面 α 的斜线 l 的射影，我们有如下命题：

例1 设直线 l 是平面 α 的斜线，l' 是 l 在平面 α 上的射影，m 是平面 α 内的直线.

(1) 如果 $m\perp l'$，则 $m\perp l$；

(2) 如果 $m\perp l$，则 $m\perp l'$.

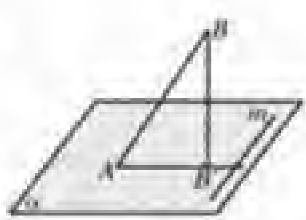


图 3-17

证明 如图 3-17，设 l 与平面 α 相交于点 A. B 是直线 l 上与 A 不同的任意一点，B' 是 B 在平面 α 内的射影，则直线 $B'B\perp$ 平面 α. 直线 AB 就是直线 l，直线 AB' 就是 l 在平

面α上的射影.

任取直线m的方向向量$\boldsymbol{a}$. 由$BB'\perp\alpha$及$m\subset\alpha$知$BB'\perp m$. 从而$\overrightarrow{B'B}\cdot\boldsymbol{a}=0$.

我们有$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB'}+\overrightarrow{B'B}$.

(1) 由$m\perp l'$得$\boldsymbol{a}\cdot\overrightarrow{AB'}=0$. 从而

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\cdot\overrightarrow{AB}&=\boldsymbol{a}\cdot(\overrightarrow{AB'}+\overrightarrow{B'B})\\&=\boldsymbol{a}\cdot\overrightarrow{AB'}+\boldsymbol{a}\cdot\overrightarrow{B'B}=0+0=0.\end{aligned}$$

故$\boldsymbol{a}\perp\overrightarrow{AB}$, 即$m\perp l$.

(2) 由$m\perp l$得$\boldsymbol{a}\cdot\overrightarrow{AB}=0$. 而$\overrightarrow{AB'}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{B'B}$, 因而

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\cdot\overrightarrow{AB'}&=\boldsymbol{a}\cdot(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{B'B})\\&=\boldsymbol{a}\cdot\overrightarrow{AB}-\boldsymbol{a}\cdot\overrightarrow{B'B}=0-0=0.\end{aligned}$$

故$\boldsymbol{a}\perp\overrightarrow{AB'}$, 即$m\perp l'$.

以上的结论(1)称为

三垂线定理：在平面内的一条直线，如果它和这个平面的一条斜线的射影垂直，那么它也和这条斜线垂直.

结论(2)称为

三垂线定理的逆定理：在平面内的一条直线，如果它和这个平面的一条斜线垂直，那么它也和这条斜线在平面内的射影垂直.

也可不用向量运算，而利用直线与平面垂直的判定定理推出三垂线定理及逆定理.

例1的另一种证明方法.

仍设$l\cap$平面$\alpha=A$, $l=AB$, B'是B在α内的射影. 从而$BB'\perp$平面α, 且由$m\subset$平面α知$BB'\perp m$.

(1) $m\perp AB'$, $m\perp BB'$, 且AB'与BB'是平面ABB'内两条相交直线. 由直线与平面垂直的判定定理得：$m\perp$平面ABB'. 而$l=AB\subset$平面ABB', 故$m\perp l$.

(2) $m\perp l=AB$, $m\perp BB'$, 且AB与BB'是平面ABB'内两条相交直线. 由直线与平面垂直的判定定理得：$m\perp$平面ABB'. 而$l'=AB'\subset$平面ABB', 故$m\perp l'$.

例2 如图3-18所示，在四棱锥$P-ABCD$中，$PD\perp$底面

$ABCD$，底面 $ABCD$ 为正方形，E，F 分别为 AB，PB 的中点．求证：$EF\perp CD$．

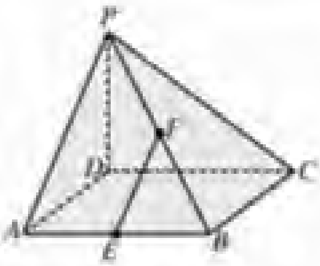


图3-18

证明 $\because$ $PD\perp$面 $ABCD$，$\therefore$ AD 是 PA 在底面 $ABCD$ 上的射影．由已知 $ABCD$ 为正方形，$\therefore$ $CD\perp AD$．由三垂线定理可知，$CD\perp PA$．又 $\because$ E，F 分别为 AB，PB 的中点，$\therefore$ $EF\parallel PA$，$\therefore$ $EF\perp CD$．

练　习

已知直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的底面 ABC 是等腰直角三角形，且 $\angle ABC=90°$，$AC=2a$，$BB_1=3a$，D 为 A_1C_1 的中点．问在线段 AA_1 上是否存在点 F，使得 $CF\perp$面 B_1DF？若存在，求出 $|\overrightarrow{AF}|$；若不存在，说明理由．

习题 5

学而时习之

1．在正方体 AC_1 中，E，F 分别为 BB_1，DC 的中点．求证：$AE\perp$面 A_1D_1F．

2．试判断在棱长为 a 的正方体 AC_1 中，棱 DD_1 上是否存在一点 P，使 $B_1D\perp$面 PAC？若存在，求出 DP 的长；若不存在，试说明理由．

温故而知新

3．已知 CD 为 $Rt\triangle ABC$ 斜边上的高，$BD=2AD$，将 $\triangle ACD$ 绕 CD 旋转至

$\triangle A'CD$，使二面角 $A'\text{-}CD\text{-}B$ 为 $60°$．(1) 求证：$BA' \perp$ 面 $A'CD$；(2) 求异面直线 $A'C$ 与 BD 所成角的大小．

3.6 平面的法向量

我们已经学会用方向向量来表示直线的方向．要计算两条直线所成的角，只要计算这两条直线的方向向量之间所成的角．直线的平行或垂直关系，也可以转化为它们的方向向量的平行或垂直关系来讨论和研究．

比如，与平面 α 平行的向量能不能表示这个平面的方向？

能不能将任意一个平面 α 的方向用一个向量来表示？

如果有向线段 AB 所在的直线与平面 α 平行，或者 AB 在平面 α 上，就称向量 $\overrightarrow{AB}$ 与平面 α 平行．

如果有向线段 AB 所在的直线与平面 α 垂直，就称向量 $\overrightarrow{AB}$ 与平面 α 垂直．

例 1 如图 3－19，在直棱柱 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 中，与哪些棱平行的向量与平面 ABC 平行，这些向量是否两两相互平行，与哪些棱平行的向量与平面 ABC 垂直，这些向量是否两两相互平行？

解 与棱 AB，BC，CA，A_1B_1，B_1C_1，C_1A_1 平行的向量与平面 ABC 平行，这些向量并非两两平行．比如，$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{CA}$ 两两不平行．

与棱 AA_1，BB_1，CC_1 平行的向量与平面 ABC 垂直，这些向量两两平行．

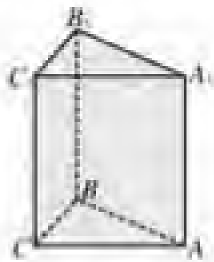


图 3－19

一般地，与同一平面 α 垂直的向量相互平行．与同一个非零向量垂直的不同的平面相互平行．

与平面 α 平行的向量有各不相同的方向，不适于用来表示平面的方向．与平面垂直的向量相互平行，只可能有两个相反的方向，能够确定平面的方向．

与平面 α 垂直的非零向量称为 α 的法向量（normal vector）．平面的法向量可以代表平面的方向．

例如，在例 1 所说的直棱柱 $ABC\text{—}A_1B_1C_1$ 中，$\overrightarrow{AA_1}$ 和 $\overrightarrow{A_1A}$ 都是平面 ABC 的法向量．

例2 如图3-20，已知正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$，求平面BDA_1的一个法向量.

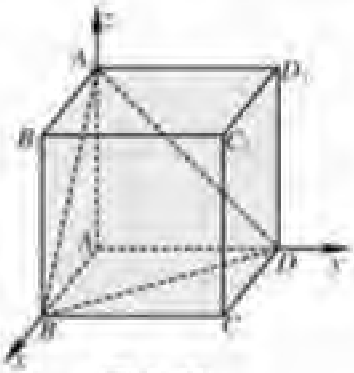


图3-20

解 设正方体的棱长为a，以A为原点，以$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{AA_1}$的方向分别作为x轴、y轴、z轴的正方向，建立空间直角坐标系，则B，D，A_1的坐标分别为$B(a,0,0)$，$D(0,a,0)$，$A_1(0,0,a)$，从而

$$\overrightarrow{BD}=(-a,a,0),\quad \overrightarrow{BA_1}=(-a,0,a).$$

如果能找出非零向量$\boldsymbol{n}=(x,y,z)$同时垂直于$\overrightarrow{BD}$，$\overrightarrow{BA_1}$，从而同时垂直于平面BDA_1内两条相交直线BD，DA_1，则$\boldsymbol{n}$垂直于平面BDA_1，是平面BDA_1的法向量.

$$\boldsymbol{n}\perp\text{平面}BDA_1\Leftrightarrow\begin{cases}(-a,a,0)\cdot(x,y,z)=-ax+ay=0,\\(-a,0,a)\cdot(x,y,z)=-ax+az=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x=y=z$$

$$\Leftrightarrow\boldsymbol{n}=(x,x,x)\text{，其中 }x\neq0.$$

比如取$x=a$得到$\boldsymbol{n}=(a,a,a)=\overrightarrow{AC_1}$. 正方体对角线$AC_1$表示的向量$\overrightarrow{AC_1}$是平面$BDA_1$的法向量.

练习

1. 已知平面α中有三点$A(2,3,1)$，$B(4,1,2)$，$C(6,3,7)$. 求平面α的法向量.
2. 在棱长为a的正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，试问$\overrightarrow{AC_1}$是否是平面CB_1D_1的法向量.

习题 6

学而时习之

1. 已知 $PA\perp$ 面 $ABCD$，$PA=AB=3$，面 $ABCD$ 为正方形．试建立适当空间直角坐标系，分别求下列平面的法向量：

   (1) 面 $ABCD$；　(2) 面 PAB；　(3) 面 PBC；　(4) 面 PCD.

2. 在四面体 $ABCD$ 中，$AB\perp$ 面 BCD，$BC=CD$，$\angle BCD=90^\circ$，$\angle ADB=30^\circ$，E，F 分别为 AC，AD 的中点．分别求出面 BEF 与面 ABC 的法向量，并据此说明平面 BEF 与平面 ABC 的位置关系.

温故而知新

3. 在底面是直角梯形的四棱锥 $S-ABCD$ 中，$\angle ABC=90^\circ$，$SA\perp$ 面 $ABCD$，$SA=AB=BC=1$，$AD=\frac{1}{2}$．求面 SCD 与面 SAB 的法向量以及这两个法向量所成角的余弦值.

3.7 直线与平面、平面与平面所成的角

如果直线 l 与平面 α 垂直，很自然定义 l 与平面 α 所成的角 θ 为直角，$\theta=\frac{\pi}{2}$．如果直线 l 与平面 α 不垂直，则 l 在 α 内的射影是一条直线 l'，将 l 与 l' 所成的角 θ 定义为 l 与平面 α 所成的角.

实际计算的时候，常常不容易确定 l 在平面 α 内的射影 l'．作直线 l 的方向向量 $\boldsymbol{v}$ 和平面 α 的法向量 $\boldsymbol{n}$，并且可选 $\boldsymbol{v}$ 与 $\boldsymbol{n}$ 所成的角 $\theta_1\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$．利用数量积运算可求出 $\cos\theta_1$，则 l 与平面 α 所成角 $\theta=\frac{\pi}{2}-$

θ_1，$\sin\theta=\cos\theta_1$.

例1 如图 3－21，已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$，求直线 AB 与平面 BDA_1 所成的角 θ 的正弦.

解 设正方体的棱长为 a. 以 A 为原点，以 $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{AA_1}$ 的方向分别作为 x 轴、y 轴、z 轴的正方向，建立空间直角坐标系.

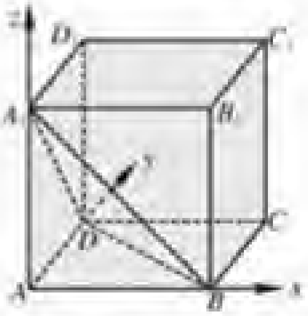


图 3－21

直线 AB 的方向向量可以取作 $\boldsymbol{v}=(1,0,0)$.

BD，DA_1 是平面 BDA_1 内两条相交直线，$\overrightarrow{BD}=(-a,a,0)$，$\overrightarrow{DA_1}=(0,-a,a)$，由

$$(1,1,1)\cdot(-a,a,0)=-a+a=0,$$
$$(1,1,1)\cdot(0,-a,a)=-a+a=0,$$

知 $\boldsymbol{n}=(1,1,1)$ 垂直于 $\overrightarrow{BD}$，$\overrightarrow{DA_1}$ 从而垂直于平面 BDA_1，是平面 BDA_1 的法向量.

设 $\boldsymbol{v}$ 与 $\boldsymbol{n}$ 的夹角为 θ_1，$\boldsymbol{v}$ 与平面 BDA_1 所成的角为 θ，则 $\theta=\frac{\pi}{2}-\theta_1$，

$$\sin\theta=|\cos\theta_1|=\frac{|\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{v}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\frac{|1\times1+1\times0+1\times0|}{1\times\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

当然也可以取 $\overrightarrow{AB}=(a,0,0)$ 为 AB 的方向向量，但取它的单位向量 $(1,0,0)$ 更简单.

与 3.2 例 2 求平面 BDA_1 的法向量是通过解方程. 而在这里是直接求出法向量 $(1,1,1)$ 的. 事实上只要能找一个非零的 (x,y,z) 与 $(a,-a,0)$，$(0,-a,a)$ 的数量积都是 0，就找到一个法向量.

由 $\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 可求出锐角 θ. 满足这一条件的 θ 可记为 $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{3}$.

我们在必修第三册第 6 章中学习过二面角的概念，现在来回顾一下：

在一个平面上作一条直线，则这条直线将平面分成两部分，其中每部分都称为半平面. 从一条直线 l 出发的两个半平面 α，β 组成的图形叫作二面角，记为 $\alpha-l-\beta$. 这条直线 l 称为这个二面角的棱，半平面 α，β 都称为这个二面角的面. 也可以在两个面内各取一个不在棱上的点 A，B，将二面角记作 $A-l-B$.

二面角的大小可以用它的平面角来度量. 过二面角 $\alpha-l-\beta$ 的棱 l 上任意一点 O 作垂直于棱 l 的平面，分别与两个面 α，β 相交得到两

条射线 OA、OB，则 $\angle AOB$ 称为二面角 $\alpha-l-\beta$ 的平面角．本书中约定平面角的度数在 $0^\circ\sim180^\circ$ 范围内，并且将平面角 $\angle AOB$ 的度数也称为二面角 $\alpha-l-\beta$ 的度数．特别当二面角 $\alpha-l-\beta$ 是 90° 时称它为直二面角．此时称两个面 α，β 所在的平面相互垂直．

设两个平面 α，β 相交于直线 l，则以 l 为棱，两个面可以构成四个二面角，其中最小的一个二面角称为这两个平面所成的角，取值范围在 $0^\circ\sim90^\circ$ 之间．两个平行平面所成的角为 0°．

实际计算二面角或两个平面所成的角的大小时，有时不容易确定二面角的平面角，而可以通过两个平面的法向量．

例 2 已知单位正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$，E，F 分别是棱 B_1C_1 和 C_1D_1 的中点，如图 3－22．试求：

(1) AF 与平面 BED_1 所成的角；

(2) 二面角 C_1-DB-B_1 的大小(图 3－23)．

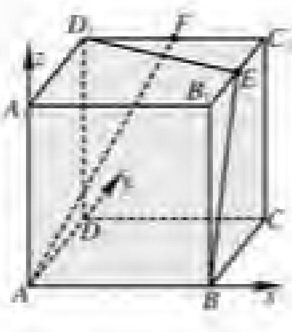


图 3－22

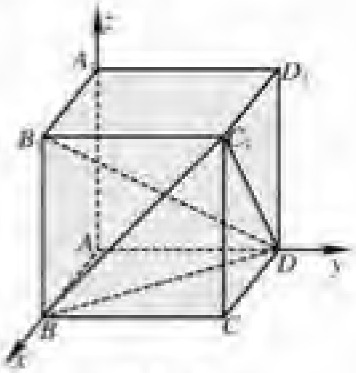


图 3－23

解 以 A 为原点，$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{AA_1}$ 分别为 x 轴、y 轴、z 轴的正方向建立空间直角坐标系，则相关的点的坐标分别为 $B(1,0,0)$，$D_1(0,1,1)$，$B_1(1,0,1)$，$C_1(1,1,1)$，$E\left(1,\frac{1}{2},1\right)$，$F\left(\frac{1}{2},1,1\right)$．

(1) 平面 BED_1 的法向量 $\boldsymbol{n}$ 垂直于 $\overrightarrow{BD_1}$ 和 $\overrightarrow{BE}$．而 $\overrightarrow{BD_1}=(-1,1,1)$，$\overrightarrow{BE}=\left(0,\frac{1}{2},1\right)$．由 $\boldsymbol{n}\cdot\left(0,\frac{1}{2},1\right)=0$ 可取 $\boldsymbol{n}=(x,2,-1)$．再由 $\boldsymbol{n}\cdot(-1,1,1)=-x+2-1=0$ 得 $x=1$．故 $\boldsymbol{n}=(1,2,-1)$．

设 $\overrightarrow{AF}$ 与 $\boldsymbol{n}$ 所成的角为 θ，则

$$\cos\theta=\frac{\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AF}}{|\boldsymbol{n}|\cdot|\overrightarrow{AF}|}=\frac{(1,2,-1)\cdot\left(\frac{1}{2},1,1\right)}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{\frac{9}{4}}}=\frac{\frac{3}{2}}{\sqrt{6}\cdot\frac{3}{2}}=\frac{\sqrt{6}}{6}.$$

AF 与平面 BED_1 所成的角为 $\theta_1=\frac{\pi}{2}-\theta$，$\sin\theta_1=\cos\theta=\frac{\sqrt{6}}{6}$，由此可求得 $\theta_1=\arcsin\frac{\sqrt{6}}{6}$.

(2) 首先，分别求平面 DBC_1 与 DBB_1 的法向量 $\boldsymbol{n}_1$，$\boldsymbol{n}_2$.

$\overrightarrow{DB}=(1,0,0)-(0,1,0)=(1,-1,0)$，

$\overrightarrow{DC_1}=(1,1,1)-(0,1,0)=(1,0,1)$.

平面 DBC_1 的法向量 $\boldsymbol{n}_1$ 应与 $(1,-1,0)$ 及 $(1,0,1)$ 都垂直，易验证 $\boldsymbol{n}_1=(1,1,-1)$符合要求.

又$\overrightarrow{BB_1}=(0,0,1)$，平面 DBB_1 的法向量 $\boldsymbol{n}_2$ 应与$(1,-1,0)$及$(0,0,1)$都垂直. 易验证 $\boldsymbol{n}_2=(1,1,0)$符合要求.

设 $\boldsymbol{n}_1$，$\boldsymbol{n}_2$ 所成的角为 θ. 则

$$\begin{aligned}\cos\theta&=\frac{\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n}_1|\cdot|\boldsymbol{n}_2|}\\&=\frac{(1,1,-1)\cdot(1,1,0)}{\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2}\sqrt{1^2+1^2}}\\&=\frac{2}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{3}.\end{aligned}$$

于是 $\theta=\arccos\frac{\sqrt{6}}{3}$，这就是二面角 C_1-DB-B_1 的大小.

练 习

1. 正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E 是 BC 的中点，则平面 B_1D_1E 与平面 $ABCD$ 所成的二面角的正弦值为（　　）

(A) $\frac{\sqrt{2}}{4}$　　(B) $\frac{\sqrt{6}}{2}$　　(C) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$　　(D) 1

2. 一个正四棱锥的一个对角面与一个侧面的面积之比为$\sqrt{6}:2$，则其侧面与底面

所成的角为（　　）

(A) 15°　　(B) 30°　　(C) 45°　　(D) 60°

习题 7

学而时习之

1. 如图 3－24 所示，已知直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AC=CB=AA_1=2$，$\angle ACB=90^\circ$，E 为 BB_1 的中点，$D\in AB$，$\angle A_1DE=90^\circ$.

   (1) 求证：$CD\perp$ 平面 ABB_1A_1；

   (2) 求二面角 $D-A_1C-A$ 的大小.

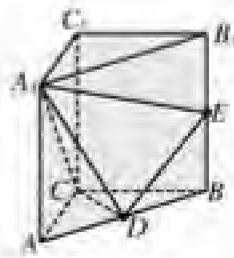


图 3－24

2. 以正方形 $ABCD$ 的对角线 BD 为棱折成直二面角，连接 AC，求二面角 $A-CD-B$ 的余弦值.

温故而知新

3. 在三棱锥 $P-ABC$ 中，$PC\perp$ 面 ABC，$AB=BC=CA=PC$，求二面角 $B-AP-C$ 的余弦值.

3.8　点到平面的距离

从空间中一点 P 到平面 α 作垂线 PD 交平面 α 于 D，则线段 PD 的长度 d 称为点 P 到平面 α 的距离.

假如知道了平面 α 的法向量 $\boldsymbol{n}$ 以及平面上任一点 A，不需要找出垂足 D 的位置也能求出 P 到平面 α 的距离 d. 此时向量 $\overrightarrow{AP}$ 在法向量

$\boldsymbol{n}$ 所在方向上的投影长度 d 就等于点 P 到平面 α 的距离. 从 A 出发作 $\overrightarrow{AN}=\boldsymbol{n}$，从点 P 作 AN 的垂线与 AN 相交于 P_1，则 $|AP_1|$ 就是 $\overrightarrow{AP}$ 在法向量 $\overrightarrow{AN}$ 上的投影长，且

$$d=|AP_1|=||AP|\cos\angle PAN|=\left|\frac{\overrightarrow{AP}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{n}|}\right|.$$

这样，就可以由 $\overrightarrow{AP}$ 与 $\boldsymbol{n}$ 通过数量积运算得出 d.

例 如图3－25，在三棱锥 $S-ABC$ 中，棱长 $|SA|=a$，$|SB|=b$，$|SC|=c$，$\angle ASB$，$\angle BSC$，$\angle CSA$ 都是直角，求底面 ABC 上的高.

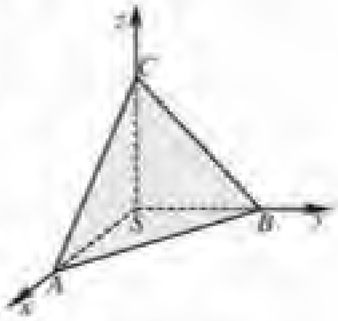


图3－25

解 底面 ABC 上的高 h 也就是顶点 S 到底面 ABC 的距离.

以 S 为原点，以 $\overrightarrow{SA}$，$\overrightarrow{SB}$，$\overrightarrow{SC}$ 的方向分别作为 x 轴、y 轴、z 轴的正方向，建立空间直角坐标系. 则三棱锥各顶点的坐标分别为 $S(0,0,0)$，$A(a,0,0)$，$B(0,b,0)$，$C(0,0,c)$.

$\overrightarrow{AB}=(-a,b,0)$，$\overrightarrow{AC}=(-a,0,c)$. 设 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，在方程组

$$\begin{cases}(-a,b,0)\cdot(x,y,z)=-ax+by=0,\\(-a,0,c)\cdot(x,y,z)=-ax+cz=0\end{cases}$$

中将 x 当作已知数解出 $y=\frac{ax}{b}$，$z=\frac{ax}{c}$，$\boldsymbol{n}=\left(x,\frac{ax}{b},\frac{ax}{c}\right)$，$x$ 可以任意取值. 可令 $x=bc$，得 $y=ac$，$z=ab$，$\boldsymbol{n}=(bc,ac,ab)$.

$$h=\frac{|\overrightarrow{SA}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|}=\frac{|(a,0,0)\cdot(bc,ac,ab)|}{\sqrt{(bc)^2+(ac)^2+(ab)^2}}$$

$$=\frac{abc}{\sqrt{b^2c^2+a^2c^2+a^2b^2}}.$$

设直线 l 平行于平面 α，则 l 上所有的点到 α 的距离相等，称为 l 与 α 的距离. 显然，只要在 l 上任取一点 P，求出 P 到 α 的距离，就得到了 l 与 α 的距离.

设两个平面 α 与 β 平行，则 β 上所有的点到 α 的距离相等，称为两个平行平面 α，β 的距离. 显然，只要在 β 上任取一点 P，求出 P 到 α 的距离，就得到了这两个平面的距离.

练　习

1. 已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1，则直线 DA_1 与 AC 间的距离为____.
2. 设 $A(2, 3, 1)$，$B(4, 1, 2)$，$C(6, 3, 7)$，$D(-5, -4, 8)$，求点 D 到平面 ABC 的距离.

习题 8

学而时习之

这可以看作勾股定理在空间中的推广.

1. 三棱锥 $S-ABC$ 的角 $\angle ASB$，$\angle BSC$，$\angle CSA$ 都是直角. 求证：四个面的面积满足条件 $S^2_{\triangle SAB}+S^2_{\triangle SBC}+S^2_{\triangle SAC}=S^2_{\triangle ABC}$.（提示：设 $|SA|=a$，$|SB|=b$，$|SC|=c$，易求出三个面 $\triangle SAB$，$\triangle SBC$，$\triangle SAC$ 的面积及棱锥的体积 V. 在 3.8 例 1 中已经求出棱锥底面 $\triangle ABC$ 上的高 h，由 $V=\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}h$ 可求出 $S_{\triangle ABC}$.）
2. 如图 3-26 所示，四面体 $ABCD$ 中，AB，BC，BD 两两垂直，且 $AB=BC=2$，E 是 AC 的中点，异面直线 AD 与 BE 所成角的余弦为 $\frac{\sqrt{10}}{10}$，求此四面体的体积.

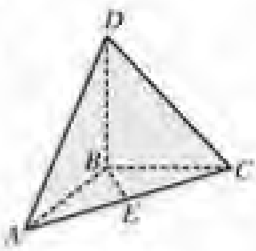


图 3-26

温故而知新

3. 正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=1$，$AA_1=2$，点 E 为 CC_1 中点，点 F 为 BD_1 的中点.

(1) 求异面直线 BD_1 与 CC_1 的距离；

(2) 求点 D_1 到平面 BDE 的距离.

3.9 共面与平行

一、利用法向量判定共面与平行

我们知道，空间中三个点一定在同一个平面内，但四个点不一定在同一平面内.

如果若干个图形在同一个平面内，就称这些图形共面(coplanar).

怎样判断四个不同的点 A，B，C，D 是否共面？

假如其中三个点 A，B，C 在同一条直线 l 上，过 l 与 D 可以作平面，A，B，C，D 同在这个平面内，A，B，C，D 共面.

因此只需考虑 A，B，C 不共线的情形，此时 A，B，C 决定一个平面. 设 $\boldsymbol{n}$ 是平面 ABC 的任意一个法向量，则

$$A, B, C, D \text{ 共面} \Leftrightarrow \text{直线 } AD \text{ 在平面 } ABC \text{ 内} \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{AD} \perp \boldsymbol{n}.$$

一般地，设 $\boldsymbol{n}$ 是平面 α 的一个法向量，$\boldsymbol{v}$ 是直线 l 的方向向量，则

$$\boldsymbol{v} \perp \boldsymbol{n} \Leftrightarrow l /\!/ \alpha \text{ 或 } l \subset \alpha$$

如果 $\boldsymbol{v} \perp \boldsymbol{n}$ 且 l 上至少有一点 $A \in \alpha$，则 $l \subset \alpha$.

如果 $\boldsymbol{v} \perp \boldsymbol{n}$ 且 l 上至少有一点 $A \notin \alpha$，则 $l /\!/ \alpha$.

例1 如图 3－27，设在空间建立了直角坐标系，已知三点 $A(1,0,0)$，$B(0,1,0)$，$C(0,0,1)$，而 $P(x,y,z)$ 是空间任意一点. 求 A，B，C，P 共面的充分必要条件.

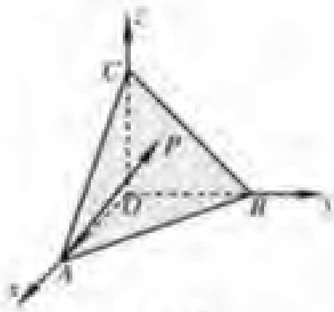


图 3－27

解 先求平面 ABC 的法向量 $\boldsymbol{n}$，$\boldsymbol{n}$ 应垂直于 AB，AC. 而

$\overrightarrow{AB}=(-1,1,0)$，$\overrightarrow{AC}=(-1,0,1)$.

易验证 $\boldsymbol{n}=(1,1,1)$ 垂直于 $(-1,1,0)$，$(-1,0,1)$，因此，$\boldsymbol{n}$ 是平面 ABC 的法向量.

$x+y+z=1$ 是平面 ABC 上的点满足的条件，也就是平面 ABC 的方程.

$P\in$ 平面 $ABC\Leftrightarrow$ 直线 $AP\subset$ 平面 ABC

$\Leftrightarrow \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AP}=0$

$\Leftrightarrow (1,1,1)\cdot(x-1,y,z)=x-1+y+z=0$

$\Leftrightarrow x+y+z=1$.

例2 如图3-28，已知矩形 $ABCD$ 和矩形 $ADEF$ 垂直，以 AD 为公共边，但它们不在同一平面上. 点 M，N 分别在对角线 BD，AE 上，且 $|BM|=\frac{1}{3}|BD|$，$|AN|=\frac{1}{3}|AE|$. 证明：MN // 平面 CDE.

证法1 设 $|DA|=a$，$|DC|=b$，$|DE|=c$.

以 D 为原点，分别以 $\overrightarrow{DC}$，$\overrightarrow{DA}$，$\overrightarrow{DE}$ 为 x 轴、y 轴、z 轴的正方向，建立空间直角坐标系. 则相关的点的坐标为 $B(b,a,0)$，$A(0,a,0)$，$E(0,0,c)$.

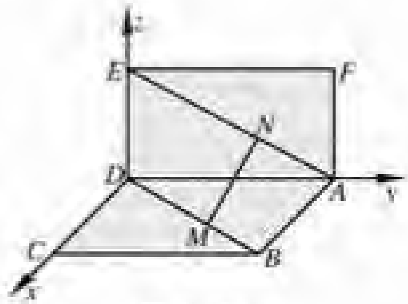


图3-28

由于 DA 垂直于平面 CDE 内两条相交直线 DC，DE，$\overrightarrow{DA}$ 是平面 CDE 的法向量，$\overrightarrow{DA}=(0,a,0)$.

$$\overrightarrow{DM}=\frac{2}{3}\overrightarrow{DB}=\frac{2}{3}(b,a,0)=\left(\frac{2}{3}b,\frac{2}{3}a,0\right),$$

$$\overrightarrow{DN}=\overrightarrow{DA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AE}=(0,a,0)+\frac{1}{3}(0,-a,c)=\left(0,\frac{2}{3}a,\frac{1}{3}c\right),$$

$$\overrightarrow{MN}=\left(0,\frac{2}{3}a,\frac{1}{3}c\right)-\left(\frac{2}{3}b,\frac{2}{3}a,0\right)=\left(-\frac{2}{3}b,0,\frac{1}{3}c\right).$$

故 $\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{DA}=\left(-\frac{2}{3}b,0,\frac{1}{3}c\right)\cdot(0,a,0)=0$.

显然点 M 不在平面 CDE 上，因此直线 MN // 平面 CDE.

证法2 将 $\overrightarrow{MN}$ 表示为三个基本的向量 $\overrightarrow{DC}$，$\overrightarrow{DE}$，$\overrightarrow{DA}$ 的线性组合：

$$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AN}$$

$$=\frac{1}{3}\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AE}$$

$$=\frac{1}{3}(\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{DA})+(-\overrightarrow{DC})+\frac{1}{3}(\overrightarrow{DE}-\overrightarrow{DA})$$

$$=-\frac{2}{3}\overrightarrow{DC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{DE}.$$

结果发现$\overrightarrow{MN}$是平面 CDE 中两个向量$\overrightarrow{DC}$、$\overrightarrow{DE}$的线性组合. 从 D 出发作$\overrightarrow{DP}=\overrightarrow{MN}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{DC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{DE}$，则 $DP\subset$平面 CDE.

显然 MN 不在平面 CDE 内. 但由$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{DP}$知道 MN 平行于平面 CDE 内的直线 DP，由直线与平面平行的判定定理知 $MN\parallel$平面 CDE.

练 习

1. 如图 3－29，在四棱柱 $S-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是正方形，$SA\perp$底面 $ABCD$，$SA=AB$，M、N 分别是 SB，SD 的中点. 求证：$BD\parallel$面 AMN.（要求至少用两种方法加以证明.）

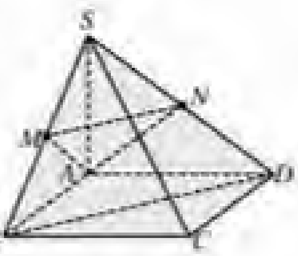


图 3－29

2. 正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，E、F 分别为 A_1B、AC 上的点，且 $A_1E=2EB$，$CF=2AF$. 求证：$EF\parallel$面 A_1B_1CD.

习题 9

学而时习之

1. 如图 3－30 所示，正方形 $ABCD$ 和正方形 $ABEF$ 交于 AB，M、N 分别是 BD，AE 上的点，且 $AN=DM$. 试用向量方法证明 $MN\parallel$平面 EBC.

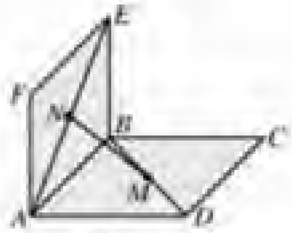


图3-30

2. E，F，P，Q分别是棱长为a的正方体AC_1的棱BC，C_1D_1，AD_1，BD的中点．(1) 求证：PQ∥平面DCC_1D_1；(2) 求PQ的长；(3) 求证：EF∥平面BB_1D_1D.

温故而知新

3. 已知正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$棱长为a，E，F分别在AB_1，BD上，且$B_1E=BF$．求证：EF∥BCC_1B_1.

多知道一点

向量的线性相关

3.9例2的证法二提出了判断一条直线MN平行于一个平面α的另外一个方法：

设DC，DE是平面α内两条相交线段．根据平面向量基本定理，平面α内任何一条有向线段M_1N_1表示的向量$\overrightarrow{M_1N_1}$都能写成$\overrightarrow{DC}$，$\overrightarrow{DE}$的线性组合$\overrightarrow{M_1N_1}=x\overrightarrow{DC}+y\overrightarrow{DE}$的形式．反过来，假如直线$MN$的方向向量$\overrightarrow{MN}$能写成$\overrightarrow{DC}$，$\overrightarrow{DE}$的线性组合$\overrightarrow{MN}=x\overrightarrow{DC}+y\overrightarrow{DE}$，从平面$\alpha$内的点$D$出发作$\overrightarrow{DP}=\overrightarrow{MN}=x\overrightarrow{DC}+y\overrightarrow{DE}$，则$DP$在平面$\alpha$内．由$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{DP}$知道直线$MN$与$DP$平行或重合．如果$MN$不在平面$\alpha$内，则$MN$∥$\alpha$.

一般地，设A，B，C，D是空间四个点，其中A，B，C不共

线，则由平面向量基本定理可知：

A、B、C、D 共面 $\Leftrightarrow AD$ 在平面 ABC 内 $\Leftrightarrow$ 存在实数 x、y 使 $\overrightarrow{AD}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$（图 3－31）.

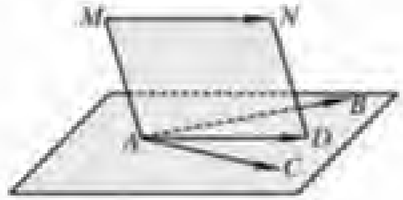


图 3－31

可见

$$\overrightarrow{MN}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$$
$$\Leftrightarrow MN\subset \text{平面 } ABC$$
$$\text{或 } MN\,/\!/\,\text{平面 } ABC$$

而如果 $\boldsymbol{v}$ 是直线 l 的方向向量，则

$$\boldsymbol{v}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}\Leftrightarrow l\subset \text{平面 } ABC$$
$$\text{或 } l\,/\!/\,\text{平面 } ABC.$$

如果向量 $\boldsymbol{v}$ 可以用平面 α 内的有向线段表示，就称向量 $\boldsymbol{v}$ 与平面 α 平行，记为 $\boldsymbol{v}/\!/\alpha$.

如果 $\boldsymbol{v}$ 可以用平面 α 内的有向线段 AB 表示，$\boldsymbol{v}$ 一定也可以用与 α 平行的有向线段表示．所以我们不管 $\boldsymbol{v}$ 在平面 α 内还是 $\boldsymbol{v}$ 与 α 平行.

如果一组向量可以用同一个平面内的有向线段表示，我们称这些向量**共面**．而这也就是说这一组向量平行于同一个平面.

我们知道，两个向量一定共面，但三个向量不一定共面．怎样判断三个向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 是否共面？

我们有

定理　三个向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 共面 $\Leftrightarrow \boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 中有一个向量是其余两个向量的线性组合.

证明　从同一点出发作 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}$.

先设 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 不平行，OA、OB 相交．由平面向量基本定理得：

$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 共面 $\Leftrightarrow OC\subset$ 平面 OAB

$\Leftrightarrow$ 存在实数 x、y 使 $\overrightarrow{OC}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}\Leftrightarrow \boldsymbol{c}$ 是 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 的线性组合.

再设 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$．此时可作平面 α 包含 OB、OC，当然 α 也包含 OA，此时 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 共面，并且 $\boldsymbol{a}=0\boldsymbol{b}+0\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{a}$ 是 $\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 的线性组合．

最后设 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 平行且 $\boldsymbol{a}\neq 0$．此时 OB 在直线 OA 上，可作平面 α 包含 OA，OC，平面 α 也包含 OB，$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 共面．此时存在实数 x 使 $\boldsymbol{b}=x\boldsymbol{a}=x\boldsymbol{a}+0\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{b}$ 是 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{c}$ 的线性组合．

综上所述，可知在所有情况下定理的结论都成立．

两个向量线性相关⇔这两个向量共线（平行）．试自己作出证明．

如果一组向量中有一个向量是其余向量的线性组合，就称这一组向量线性相关（linearly dependent）．

按照这个说法，定理1可以重新叙述为：

三个向量共面⇔这三个向量线性相关．

根据这个定理，要证明四点 A、B、C、D 共面，只要证明 $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{AD}$ 线性相关；要证明直线 MN 平行于平面 ABC，只要证明 $\overrightarrow{MN}$、$\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{AC}$ 线性相关，并且 MN 不在平面 ABC 内．

小结与复习

一、指导思想

空间向量是研究空间图形的有力工具．

平面上的向量都可以看作空间中的向量．空间中两个向量的运算可以直接看作平面上两个向量的运算，二者没有什么区别．平面向量的坐标由两个实数组成，空间向量的坐标由三个实数组成，这是二者的主要区别．但它们的坐标运算也是完全类似的．空间向量的知识不需要再花多少时间去学习，重要的在于学会用向量及其运算来描述空间图形及其性质，解决空间图形的有关问题．

空间中线段的长度、两点的距离可以通过向量的模来计算．

直线的方向可以用方向向量描述，平面的方向可以用法向量描述．这样，直线与直线、直线与平面、平面与平面所成的角都可以转化为向量之间的夹角的问题，通过向量的运算来解决．这也包括了直线与平面的平行关系的判定．点到平面的距离，也可以转化为点到平面的任一向量到平面的法向量上的射影来计算．

二、内容提要

1．空间向量的概念及运算：与平面向量类似．

2．空间向量的分解与坐标．

（1）向量的坐标：设 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{e}_3$ 是空间中两两垂直的单位向量，则任一向量 $\boldsymbol{v}$ 可以分解为 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{e}_3$ 的线性组合：

$$\boldsymbol{v}=x\boldsymbol{e}_1+y\boldsymbol{e}_2+z\boldsymbol{e}_3,$$

其中的系数 x，y，z 由 $\boldsymbol{v}$ 唯一确定．(x,y,z) 称为 $\boldsymbol{v}$ 的坐标．

（2）坐标运算公式．

加减法：$(x_1,y_1,z_1)\pm(x_2,y_2,z_2)=(x_1\pm x_2,y_1\pm y_2,z_1\pm z_2)$．

与实数的乘法：$a(x,y,z)=(ax,ay,az)$.

数量积：$(x_1,y_1,z_1)\cdot(x_2,y_2,z_2)=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$.

向量的模：设 $\boldsymbol{v}=(x,y,z)$，则 $|\boldsymbol{v}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

向量的夹角：设 $\boldsymbol{v}_1=(x_1,y_1,z_1)$，$\boldsymbol{v}_2=(x_2,y_2,z_2)$，它们的夹角为 θ，则

$$\cos\theta=\frac{\boldsymbol{v}_1\cdot\boldsymbol{v}_2}{|\boldsymbol{v}_1|\cdot|\boldsymbol{v}_2|}=\frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}.$$

(3) 点的坐标与向量坐标：设 $A(x_1,y_1,z_1)$，$B(x_2,y_2,z_2)$，则

$$\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1).$$

3. 用向量和坐标描述空间图形的性质：

(1) 两点 $A(x_1,y_1,z_1)$，$B(x_2,y_2,z_2)$ 的距离：

$$|AB|=\sqrt{\overrightarrow{AB}^2}=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}.$$

(2) 两条直线 l_1，l_2 所成的角 θ：

设 $\boldsymbol{v}_1$ 和 $\boldsymbol{v}_2$ 分别是 l_1，l_2 的方向向量，则

$$\cos\theta=|\cos\langle\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2\rangle|=\frac{|\boldsymbol{v}_1\cdot\boldsymbol{v}_2|}{|\boldsymbol{v}_1|\cdot|\boldsymbol{v}_2|}.$$

(3) 直线 l 与平面 α 的夹角 θ：

设 $\boldsymbol{v}$ 是直线 l 的方向向量，$\boldsymbol{n}$ 是平面 α 的法向量，则

$$\sin\theta=|\cos\langle\boldsymbol{v},\boldsymbol{n}\rangle|.$$

(4) 两个平面 α_1，α_2 所成的二面角 θ：

设 $\boldsymbol{n}_1$，$\boldsymbol{n}_2$ 分别是 α_1，α_2 的法向量，则

$$\cos\theta=|\cos\langle\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2\rangle|.$$

(5) 共面与平行的判定：

设 $\boldsymbol{v}$ 是直线 l 的方向向量，$\boldsymbol{n}$ 是平面 α 的法向量，则

$$\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}=0\Leftrightarrow l\subset\alpha \text{ 或 } l\parallel\alpha.$$

三个向量共面⇔其中某个向量是其余两个的线性组合.

两个不同的平面平行⇔它们的法向量平行.

三、学习要求和需要注意的问题

1. 学习要求.

(1) 了解空间向量的概念，了解空间向量的基本定理及其意义；

(2) 掌握空间向量的线性运算及其坐标表示；

(3) 掌握空间向量的数量积及其坐标表示，能利用向量的数量积判断向量的共线与垂直；

(4) 理解直线的方向向量与平面的法向量；

(5) 能用向量语言表述有关线线、线面、面面的垂直和平行关系；

(6) 能用向量的方法证明有关线、面位置关系的一些重要定理，并能解决线线、线面、面面的夹角的计算问题.

2. 需要注意的问题.

(1) 要注意运用类比的方法，经历向量及其运算由平面向空间推广的过程，充分体会向量方法在研究空间几何问题中的作用；

(2) 灵活选择运用向量方法与综合方法，从不同角度解决立体几何问题，不能强求统一.

四、参考例题

例1 如图3－32，在直棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，底面是等腰三角形，$\angle ACB=90°$，侧棱 $AA_1=2$，D，E 分别是 CC_1 与 A_1B 的中点，点 E 在平面 ABD 上的射影是 $\triangle ABD$ 的重心 G.

(1) 求 $|CA|$；

(2) 求 A_1B 与平面 ABD 所成角的大小；

(3) 求点 A_1 到平面 AED 的距离.

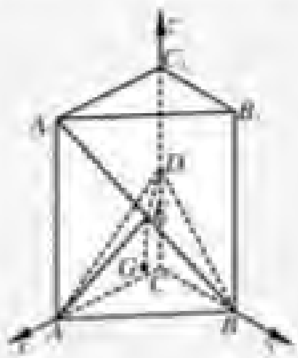


图3－32

解 设 $|CA|=|CB|=a$.

以 C 为原点，CA，CB，CC_1 的方向分别为 x，y，z 轴正方向建立直角坐标系，则相关的点的坐标分别为

$A(a,0,0)$，$B(0,a,0)$，$A_1(a,0,2)$，$C_1(0,0,2)$，$D(0,0,1)$，

$E\left(\frac{a}{2},\frac{a}{2},1\right)$.

从而

$$\overrightarrow{CG}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD})=\left(\frac{a}{3},\frac{a}{3},\frac{1}{3}\right),$$

$$\overrightarrow{GE}=\left(\frac{a}{2},\frac{a}{2},1\right)-\left(\frac{a}{3},\frac{a}{3},\frac{1}{3}\right)=\left(\frac{a}{6},\frac{a}{6},\frac{2}{3}\right).$$

(1) G 是 E 在平面 ABD 上的射影$\Leftrightarrow GE\perp$ 平面 ABD

$\Rightarrow GE\perp DB$.

而 $\overrightarrow{DB}=(0,a,0)-(0,0,1)=(0,a,-1)$.

故 $\overrightarrow{GE}\cdot\overrightarrow{DB}=\left(\frac{a}{6},\frac{a}{6},\frac{2}{3}\right)\cdot(0,a,-1)=\frac{a^2}{6}-\frac{2}{3}=0\Rightarrow a=2$.

即 $|CA|=2$.

(2) 要求 A_1B 与平面 ABD 所成的角 θ，先求 A_1B 的方向向量 $\boldsymbol{v}$ 和平面 ABD 的法向量 $\boldsymbol{n}_1$.

$\overrightarrow{A_1B}=(0,2,0)-(2,0,2)=(-2,2,-2)$，不妨取 $\boldsymbol{v}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{A_1B}=(1,-1,1)$.

$\boldsymbol{n}_1\perp$ 平面 $ABD\Leftrightarrow\boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{AB}=0$ 且 $\boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{DB}=0$.

$\overrightarrow{AB}=(-2,2,0)$，由 $\boldsymbol{n}_1\cdot(-2,2,0)=0$ 可取 $\boldsymbol{n}_1=(1,1,z)$.

$\overrightarrow{DB}=(0,2,-1)$，$(1,1,z)\cdot(0,2,-1)=2-z=0\Rightarrow z=2$.

故可取 $\boldsymbol{n}_1=(1,1,2)$.

$$\sin\theta=|\cos\langle\boldsymbol{v},\boldsymbol{n}_1\rangle|=\frac{|(1,-1,1)\cdot(1,1,2)|}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{6}}=\frac{2}{3\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{3},$$

故所求角为 $\arcsin\frac{\sqrt{2}}{3}$.

(3) 要求 A_1 到平面 AED 的距离，先求平面 AED 的法向量 $\boldsymbol{n}_2$.

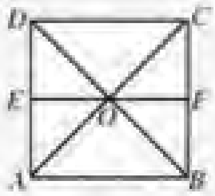
$\boldsymbol{n}_2$ 垂直于 DE，AE. 由 $\overrightarrow{ED}=(1,1,1)-(0,0,1)=(1,1,0)$ 可取 $\boldsymbol{n}_2=(1,-1,z)$.

由 $\overrightarrow{AE}=(1,1,1)-(2,0,0)=(-1,1,1)$，得 $(1,-1,z)\cdot(-1,1,1)=-2+z=0$，$z=2$，$\boldsymbol{n}_2=(1,-1,2)$.

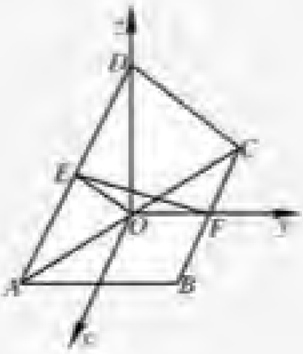
A 在平面 AED 上，$\overrightarrow{AA_1}=(0,0,2)$，$\overrightarrow{AA_1}$ 在 $\boldsymbol{n}_2$ 上的射影长 d 就是所求距离。

$$d=\frac{|\overrightarrow{AA_1}\cdot\boldsymbol{n}_2|}{|\boldsymbol{n}_2|}=\frac{|(0,0,2)\cdot(1,-1,2)|}{\sqrt{6}}=\frac{4}{\sqrt{6}}=\frac{2\sqrt{6}}{3}.$$

例2 如图3-33(a)所示，点 O 是边长为4的正方形 $ABCD$ 的中心，点 E，F 分别是 AD，BC 的中点，沿对角线 AC 把正方形$ABCD$ 折成直二面角$D-AC-B$.（1）求$\angle EOF$ 的大小；（2）求二面角$E-OF-A$的余弦.



(a)



(b)

图3-33

解 (1) 如图3-33(b) 所示建立空间直角坐标系 $O-xyz$，则 $A(2,-2,0)$，$B(2,2,0)$，$C(-2,2,0)$，$D(0,0,2\sqrt{2})$，

∴ $E(1,-1,\sqrt{2})$，$F(0,2,0)$.

∴ $\overrightarrow{OE}=(1,-1,\sqrt{2})$，$\overrightarrow{OF}=(0,2,0)$.

∴ $\cos\langle\overrightarrow{OE},\overrightarrow{OF}\rangle=\dfrac{\overrightarrow{OE}\cdot\overrightarrow{OF}}{|\overrightarrow{OE}|\,|\overrightarrow{OF}|}=-\dfrac{1}{2}$.

∵ $\langle\overrightarrow{OE},\overrightarrow{OF}\rangle\in(0°,180°)$，

∴ $\langle\overrightarrow{OE},\overrightarrow{OF}\rangle=120°$，即 $\angle EOF=120°$.

(2) 设平面 OEF 有法向量 $\boldsymbol{n}_1=(x,y,z)$.

∵ $\overrightarrow{OE}\cdot\boldsymbol{n}_1=0$ 且$\overrightarrow{OF}\cdot\boldsymbol{n}_1=0$，

∴ $\begin{cases}x-y+\sqrt{2}z=0,\\2y=0.\end{cases}$ ∴ $\begin{cases}x+\sqrt{2}z=0,\\y=0.\end{cases}$

取 $z=1$ 得 $x=-\sqrt{2}$，$\boldsymbol{n}_1=(-\sqrt{2},0,1)$.

又∵ $OD\perp$面AOF，

∴ 面AOF的法向量为$\overrightarrow{OD}=(0,0,1)$.

由图形易见二面角$E-OF-A$的大小θ为锐角.

∴ $\cos\theta=|\cos\langle \boldsymbol{n}_1,\overrightarrow{OD}\rangle|=\dfrac{|\boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{OD}|}{|\boldsymbol{n}_1|\,|\overrightarrow{OD}|}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

复习题三

学而时习之

1. 若$\boldsymbol{a}=(2x,1,3)$，$\boldsymbol{b}=(1,-2y,9)$，若$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$，则（　　）

(A) $x=1$，$y=1$　　　　(B) $x=\dfrac{1}{2}$，$y=-\dfrac{1}{2}$

(C) $x=\dfrac{1}{6}$，$y=-\dfrac{3}{2}$　　　　(D) $x=-\dfrac{1}{6}$，$y=\dfrac{3}{2}$

2. 已知$\boldsymbol{a}=(2m,m,2)$，$\boldsymbol{b}=(m,m+1,-5)$，若$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，则$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=$________.

3. 空间两个动点$A(1-x,1-x,x)$，$B(2,x,x)$，则$|\overrightarrow{AB}|$的最小值为________.

4. 已知三点$A(0,1,1)$，$B(1,2,1)$，$C(1,1,2)$，则$\cos\langle\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\rangle=$________.

5. 已知空间四边形$OABC$，$OB=OC$，且$\angle AOB=\angle AOC=\dfrac{\pi}{3}$，则$\cos\langle\overrightarrow{OA},\overrightarrow{BC}\rangle$ $=$________.

6. 在四棱锥$P-ABCD$中，$PD\perp$面$ABCD$，底面$ABCD$是直角梯形，AD为梯形的高且$PD=AD=AB=1$，$CD=2$，求异面直线PC与BD所成角的余弦值.

温故而知新

7. 已知点A，B，$C\in$平面α，点$P\notin\alpha$，则$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}=0$且$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AC}=0$是$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BC}=0$的（　　）

(A) 充分非必要条件　　　　　　(B) 必要非充分条件

(C) 充要条件　　　　　　　　　(D) 既非充分又非必要条件

8. 试判断 $A(1, 0, 1)$, $B(4, 4, 6)$, $C(2, 2, 3)$, $D(10, 14, 17)$ 四点是否共面?

9. 已知 $\boldsymbol{a}=(\cos\alpha, 1, \sin\alpha)$, $\boldsymbol{b}=(\sin\alpha, 1, \cos\alpha)$, 求 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 的夹角的大小.

10. 已知空间两个不同的单位向量 $\boldsymbol{a}=(x_1, y_1, 0)$, $\boldsymbol{b}=(x_2, y_2, 0)$ 与 $\boldsymbol{c}=(1, 1, 1)$ 的夹角都等于 $\frac{\pi}{4}$. (1) 求 x_1+y_1 和 x_1y_1 的值; (2) 求 $\cos\langle\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle$.

11. 正方体 AC_1 中, M, N, E, F 分别为 A_1D_1, A_1B_1, D_1C_1, B_1C_1 的中点, 棱长为 4. (1) 求证: 平面 MNA // 平面 $EFBD$; (2) 求平面 MNA 与平面 $EFBD$ 之间的距离.

12. 已知 $PD\perp$ 面 $ABCD$, $ABCD$ 是边长为 2 的正方形, E 是 PB 的中点, $\cos\langle\overrightarrow{DP}, \overrightarrow{AE}\rangle=\frac{\sqrt{3}}{3}$. (1) 建立适当的空间直角坐标系, 写出点 E 的坐标; (2) 在平面 PAD 内求一点 F, 使 $EF\perp$ 平面 PCB.

13. 在长方体 AC_1 中, $AB=5$, $AD=8$, $AA_1=4$, M 为 B_1C_1 上一点, 且 $B_1M=2$, 点 N 在线段 A_1D 上, $A_1D\perp AN$. (1) 求 $\cos\langle\overrightarrow{A_1D}, \overrightarrow{AM}\rangle$; (2) 求直线 A_1D 与平面 ANM 所成角的正弦值; (3) 求平面 ANM 与平面 $ABCD$ 所成角的正切值.

14. 在空间四边形 $PABC$ 中, 若 PA, PB, PC 两两垂直, 求证: $\triangle ABC$ 必为锐角三角形.

15. 已知 $GC\perp$ 面 $ABCD$, 且四边形 $ABCD$ 是边长为 4 的正方形, E, F 分别为 AB, AD 的中点, $GC=2$, 求点 B 到平面 EFG 的距离.

上下而求索

平面的方程

16. 在 3.9 例 1 中, 求出了与三个已知点 $A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$, $C(0, 0, 1)$ 共面的点 $P(x, y, z)$ 的坐标 (x, y, z) 所满足的条件 $x+y+z=1$. 这其实就是过这三个点的平面 ABC 的方程.

采用同样的方法，可以求出在空间坐标系中给定的平面的方程.

(1) 试求过点 $A(a, 0, 0)$，$B(0, b, 0)$，$C(0, 0, c)$ 的平面 ABC 的方程，其中 a，b，c 都不等于 0.

(2) 已知平面 α 有法向量 $\boldsymbol{n}=(1, 1, 1)$，并且经过点 $(1, 0, 0)$，求平面 α 的方程.

(3) 已知平面 α 有法向量 $\boldsymbol{n}=(A, B, C)$，并且经过点 $P_1(x_1, y_1, z_1)$，求平面 α 的方程.（提示：空间任意一点 $P(x, y, z)\in\alpha\Leftrightarrow\boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{P_1P}$. 将用向量表示的这个几何条件翻译成坐标等式.）

(4) 已知平面 α 的方程 $Ax+By+Cz+D=0$，证明 (A, B, C) 是平面 α 的法向量.（提示：对平面上任意两点 P_1，P_2，证明 $\boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{P_1P_2}$.）

(5) 参照 3.8 所说的方法求点到平面的距离.

①求点 $(1, 1, 1)$ 到平面 $x+y+z=1$ 的距离；

②求证：点 $P_1(x_1, y_1, z_1)$ 到平面的距离

$$d=\frac{|Ax_1+By_1+Cz_1+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

并将这个公式与平面解析几何中的点到直线的距离公式比较.

附 录

数学词汇中英文对照表

（按词汇所在页码的先后排序）

中文名	英 文 名	页 码
命题	proposition	2
真命题	true proposition	2
假命题	false proposition	2
猜想	conjecture	3
费马	Fermat	3
原命题	original proposition	5
逆命题	converse proposition	5
否命题	negative proposition	5
逆否命题	converse-negative proposition	5
充分条件	sufficient condition	9
必要条件	necessary condition	9
充分必要条件	sufficient and necessary condition	9
当且仅当	if and only if	10
等价	equivalent	10
非	not	14
且	and	14
或	or	15
全称量词	universal quantifier	18
存在量词	existential quantifier	18
椭圆	ellipse	31
焦点	focus	31
焦距	focal length	31
标准方程	standard equation	32

中心	center	37
顶点	vertex	37
长轴	major axis	37
长半轴	major half axis	37
短轴	minor axis	37
短半轴	minor half axis	37
双曲线	hyperbola	43
实轴	real axis	47
虚轴	imaginary axis	48
渐近线	asymptote	49
抛物线	parabola	58
准线	directrix	58
轴	axis	61
圆锥曲线	conic section	64
离心率	eccentricity	79
法向量	normal vector	122
共面	coplanar	131
线性相关	linearly dependent	136